

Eine Spektralsequenz in ungerader Khovanov-Homologie

Masterarbeit von Simon Beier
Betreuer: Prof. Dr. Thomas Schick
Zweitgutachter: Prof. Dr. Ralf Meyer

September 2011

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Göttingen, im September 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Geometrische Grundlagen	1
3	Konstruktion der ungeraden Khovanov-Homologie	4
4	Existenz und Invarianz der ungeraden Khovanov-Homologie	10
5	Spektralsequenzen	19
6	Eine Spektralsequenz in ungerader Khovanov-Homologie	26
7	Abhängigkeit von der Orientierung	32
8	$d \circ d = 0$	39
9	Invarianz der Spektralsequenz	57

1 Einleitung

In den späten 1990ern entwickelte Khovanov eine Verschlingungsinvariante, die Khovanov-Homologie ([1], [2]). Sie ist eine bigraduierte abelsche Gruppe, die als Homologie des Khovanov-Kettenkomplexes, der einem Verschlingungsdiagramm zugeordnet wird, entsteht. Die Eulercharakteristik der Khovanov-Homologie ist das Jones-Polynom.

Ozsvath, Rasmussen und Szabo konstruierten 2007 eine weitere Verschlingungsinvariante, die ungerade Khovanov-Homologie ([3]). Auch hierbei handelt es sich um eine bigraduierte abelsche Gruppe, die als Homologie eines Kettenkomplexes gewonnen wird. Die Konstruktion ist ähnlich zu der von Khovanov und tatsächlich stimmen die beiden Invarianten über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ überein. Ozsvath, Rasmussen und Szabo ordnen einem Verschlingungsdiagramm zwei Isomorphieklassen von Kettenkomplexen zu, die ungeraden Khovanov-Kettenkomplexe vom Typ X und vom Typ Y. Sie behaupten die beiden Isomorphieklassen wären gleich, ohne allerdings einen Isomorphismus anzugeben. Die Homologiegruppen vom Typ X und vom Typ Y sind Verschlingungsinvarianten. Wir werden zeigen, dass sie isomorph sind.

2010 konstruierte Szabo eine Spektralsequenz über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die ab dem E^2 -Term eine Verschlingungsinvariante ist ([4]). Der E^2 -Term ist die Khovanov-Homologie mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten. Die Spektralsequenz konvergiert gegen eine weitere Verschlingungshomologie. Szabo geht dabei wie folgt vor: Khovanovs Differential erhöht im Khovanov-Kettenkomplex den h -Grad um 1. Szabo konstruiert nun für alle natürlichen Zahlen n einen Homomorphismus d_n auf dem Khovanov-Kettenkomplex, der den h -Grad um n erhöht. Sein d_1 entspricht dem Khovanov-Differential. Szabo definiert dann $d := \sum_{n \geq 1} d_n$ und zeigt, dass $d \circ d = 0$. Aus dem resultierenden filtrierten Kettenkomplex erhält Szabo dann seine Spektralsequenz, die gegen die Homologie des Komplexes konvergiert. Szabo gibt eine zweite Version seiner Spektralsequenz an ([4], Anfang von Kapitel 8). Wir zeigen, dass die beiden Spektralsequenzen ab dem E^2 -Term, sowie die beiden Verschlingungshomologien, gegen die sie konvergieren, isomorph sind.

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist einen Lift von Szabos Komplex in die ganzen Zahlen zu konstruieren, so dass unser d_1 dem ungeraden Khovanov-Differential entspricht. Wir erhalten damit eine Spektralsequenz über \mathbb{Z} , die ab dem E^2 -Term eine Verschlingungsinvariante ist und deren E^2 -Term die ungerade Khovanov-Homologie ist. Die Spektralsequenz konvergiert dann gegen eine Verschlingungshomologie über \mathbb{Z} , aus der man mit dem universellen Koeffizienten-Theorem die Verschlingungshomologie von Szabo berechnen kann.

Danksagung. Ich möchte Prof. Dr. Thomas Schick für das interessante Thema und die gute Betreuung danken und dafür, dass ich seit meinem ersten Semester in seinen Vorlesungen und Seminaren sehr viel lernen durfte.

Ich möchte meinen Eltern danken, die mich immer unterstützt haben.

2 Geometrische Grundlagen

Betrachte die S^2 als orientierte glatte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Definition 1. Ein Kreis sei eine glatte Untermannigfaltigkeit der S^2 , die diffeomorph zur S^1 ist. Ein Bogen sei eine glatte Untermannigfaltigkeit mit Rand der S^2 , die diffeomorph zum Intervall $[0, 1]$ ist.

Definition 2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei ein k -dimensionaler Konfigurationsvertreter ein Tripel (T, σ, τ) , dabei sei

- T eine Teilmenge der S^2 , so dass es endlich viele Kreise und k Bögen gibt, so dass Folgendes gilt:
 1. T ist die Vereinigung der Kreise und Bögen.
 2. Die Bögen sind paarweise disjunkt.
 3. Die Kreise sind paarweise disjunkt.
 4. Das Innere jedes Bogens ist disjunkt zu allen Kreisen.
 5. Die Randpunkte der Bögen liegen auf den Kreisen.
 6. Ein Bogen und ein Kreis verlaufen an einem gemeinsamen Punkt nicht tangential.

Wir können also aus T die Kreise und Bögen zurückgewinnen.

- σ eine Ordnung auf den Bögen von T .
- τ eine Ordnung auf den Kanten von T . Dabei sind die Kanten von T die Zusammenhangskomponenten von $T \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$, wobei $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ die Bögen von T seien.

Beachte, dass τ eine Ordnung auf den Kreisen von T induziert. Ordne nämlich jedem Kreis K die kleinste Kante (im Sinne von τ) zu, die Teilmenge von K ist. τ induziert nun eine Ordnung auf den Kanten, die wir den Kreisen zugeordnet haben und somit auch eine Ordnung auf den Kreisen.

Definition 3. Ein k -dimensionaler orientierter Konfigurationsvertreter ist ein k -dimensionaler Konfigurationsvertreter zusammen mit einer Orientierung auf den Bögen.

Definition 4. Zwei k -dimensionale Konfigurationsvertreter (T, σ, τ) und $(\hat{T}, \hat{\sigma}, \hat{\tau})$ nennen wir äquivalent, wenn es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $f : S^2 \rightarrow S^2$ gibt, so dass $f(T) = \hat{T}$. Dabei soll f verträglich mit den beiden Ordnungen, die zu einem Konfigurationsvertreter gehören, sein. Für die Äquivalenz von orientierten Konfigurationsvertretern verlangen wir zusätzlich, dass f die Orientierung auf den Bögen erhält. Die Äquivalenzklassen nennen wir k -dimensionale (orientierte) Konfigurationen.

Bemerkung 5. Unsere Definitionen erlauben es uns, von Bögen, Kanten und Kreisen von Konfigurationen zu sprechen. Zum Beispiel sei der i -te Bogen einer Konfiguration die Abbildung, die jedem Vertreter der Konfiguration den Bogen zuordnet, der in der Ordnung der Bögen an i -ter Stelle steht.

Definition 6. Sei C eine orientierte Konfiguration. Dann sei

- \overline{C} die (nicht orientierte) Konfiguration, die man erhält, wenn man die Orientierung der Bögen vergisst.

- C^* die orientierte Konfiguration, die man erhält, wenn man C in kleinen Umgebungen der Bögen wie in Abbildung 1 verändert. Die Bögen werden also um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
- $r(C)$ die orientierte Konfiguration, die man erhält, wenn man die Orientierung aller Bögen umkehrt. Es gilt $(C^*)^* = r(C)$.
- $m(C)$ die orientierte Konfiguration, die man erhält, wenn man die Orientierung der S^2 umkehrt. Es gilt $(m(C))^* = m(C)$.

C^* und $m(C)$ seien für (nicht orientierte) Konfigurationen C analog zu obiger Definition definiert.

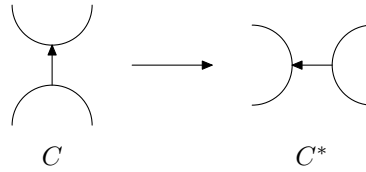


Abbildung 1: $C \rightarrow C^*$

Definition 7. Sei C eine (orientierte) Konfiguration. Dann nennen wir

- die Kreise von C auch die Startkreise von C .
- die Kreise von C^* auch die Endkreise von C .
- Die Kreise von C , die disjunkt zu allen Bögen sind, die passiven Kreise von C . Die passiven Kreise von C bilden die nulldimensionale Konfiguration $\text{pass}(C)$.
- alle anderen Kreise von C die aktiven Kreise von C .

Wir erhalten den aktiven Teil $\text{akt}(C)$ von C , wenn wir alle passiven Kreise weglassen. Wir nennen C aktiv, wenn es gleich seinem aktiven Teil ist, also wenn es keine passiven Kreise hat. Die passiven Kreise von C sind gleich den passiven Kreisen von C^* .

Definition 8. Für $n \leq k \in \mathbb{N}_0$ sei $\Sigma(k, n)$ die Teilmenge von $\{0, 1, *\}^k$, die alle Elemente enthält, bei denen genau n Komponenten ein $*$ sind. $\Sigma(k, 0)$, $\Sigma(k, 1)$ und $\Sigma(k, n)$ sind die Ecken, Kanten und n -dimensionalen Seiten des Hyperwürfels $[0, 1]^k$. Für $\varepsilon \in \Sigma(k, n)$ entstehen $\varepsilon^0, \varepsilon^1 \in \Sigma(k, 0)$ aus ε , indem wir alle $*$ durch 0 beziehungsweise 1 ersetzen. Wir nennen $\varepsilon^0/\varepsilon^1$ den Anfangs-/Endpunkt von ε . Für eine k -dimensionale (orientierte) Konfiguration C und $\varepsilon \in \Sigma(k, n)$ sei $G(C, \varepsilon)$ die n -dimensionale (orientierte) Konfiguration, die man wie folgt aus C erhält: Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, für die $\varepsilon_i = 1$ ist, verändere C in einer kleinen Umgebung des i -ten Bogens wie in Abbildung 1. Anschließend entferne alle Bögen, für die $\varepsilon_i \neq *$ ist.

Wie bekommen wir eine Ordnung auf den Kanten von $G(C, \varepsilon)$? Es kann sein, dass mehrere Kanten von C zu einer Kante in $G(C, \varepsilon)$ zusammenfallen. Ordne einer Kante in $G(C, \varepsilon)$ die kleinste der Kanten aus C , die zu unserer Kante zusammenfallen, zu. Dadurch erhalten wir eine Ordnung der Kanten von $G(C, \varepsilon)$.

3 Konstruktion der ungeraden Khovanov-Homologie

Definition 9. Sei C eine (orientierte) Konfiguration. Dann sei $V(C)$ die freie abelsche Gruppe, die von den Kreisen von C erzeugt wird.

Definition 10. Wir ordnen einer k -dimensionalen (orientierten) Konfiguration C die abelsche Gruppe

$$\Gamma(C) := \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k,0)} \Lambda V(G(C, \varepsilon))$$

zu. Dabei steht Λ für die äußere Algebra.

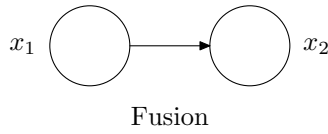
Für eine aktive orientierte eindimensionale Konfiguration C möchten wir einen \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus

$$\partial_C : \Lambda V(C) \rightarrow \Lambda V(C^*)$$

definieren. Für C gibt es die zwei Möglichkeiten aus Abbildung 2 (bis auf die Ordnung auf den Kanten). C^* ist dann jeweils der andere Fall. Hier seien x_1, x_2, y Bezeichnungen für die Kreise, die unabhängig von der Ordnung auf den Kreisen vergeben wurden.

Im 1. Fall sei

1.



2.

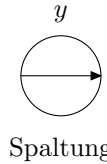


Abbildung 2: aktive orientierte eindimensionale Konfigurationen

$$\partial_C(1) = 1, \quad \partial_C(x_1) = y, \quad \partial_C(x_2) = y, \quad \partial_C(x_1 \wedge x_2) = 0.$$

Im 2. Fall sei

$$\partial_C(1) = x_1 - x_2, \quad \partial_C(y) = x_1 \wedge x_2.$$

Als Nächstes möchten wir ∂_C auch für den Fall definieren, dass C nicht unbedingt aktiv ist. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ seien z_1, \dots, z_k beliebige passive Kreise von C und $\omega := z_1 \wedge \dots \wedge z_k$. Für den aktiven Teil von C gibt es die beschriebenen zwei Möglichkeiten. Im 1. Fall sei

$$\partial_C(\omega) = \omega, \quad \partial_C(x_1 \wedge \omega) = y \wedge \omega, \quad \partial_C(x_2 \wedge \omega) = y \wedge \omega, \quad \partial_C(x_1 \wedge x_2 \wedge \omega) = 0.$$

Im 2. Fall sei

$$\partial_C(\omega) = (x_1 - x_2) \wedge \omega, \quad \partial_C(y \wedge \omega) = x_1 \wedge x_2 \wedge \omega.$$

∂_C lässt sich auch noch auf andere Weise beschreiben. Im 1. Fall sei

$$f_C : \{\text{Kreise von } C\} \rightarrow \{\text{Kreise von } C^*\}$$

eine Abbildung, die die passiven Kreise identisch abbildet. Weiterhin sei $f_C(x_1) = y = f_C(x_2)$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ seien z_1, \dots, z_k beliebige Kreise von C . Dann ist

$$\partial_C(z_1 \wedge \dots \wedge z_k) = f_C(z_1) \wedge \dots \wedge f_C(z_k).$$

Im 2. Fall seien

$$f_C^i : \{\text{Kreise von } C\} \rightarrow \{\text{Kreise von } C^*\}$$

für $i = 1, 2$ Abbildungen, die die passiven Kreise identisch abbilden. Weiterhin sei $f_C^i(y) = x_i$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ seien z_1, \dots, z_k beliebige Kreise von C . Dann ist

$$\partial_C(z_1 \wedge \dots \wedge z_k) = (x_1 - x_2) \wedge f_C^i(z_1) \wedge \dots \wedge f_C^i(z_k)$$

für $i = 1, 2$.

Sei C eine k -dimensionale orientierte Konfiguration und $\varepsilon \in \Sigma(k, 1)$. Dann erhalten wir den \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus

$$\partial_{G(C, \varepsilon)} : \underbrace{\Lambda V(G(C, \varepsilon))}_{=V(G(C, \varepsilon^0))} \rightarrow \underbrace{\Lambda V((G(C, \varepsilon))^*)}_{=V(G(C, \varepsilon^1))}.$$

Aus diesen Abbildungen möchten wir ein Differential auf $\Gamma(C)$ erhalten. Dazu müssen wir folgendes untersuchen: Sei C eine aktive orientierte zweidimensionale Konfiguration. Seien

$$a := (*, 0), \quad b := (1, *), \quad c := (0, *), \quad d := (*, 1).$$

Wie verhalten sich dann $\partial_{G(C, b)} \circ \partial_{G(C, a)}$ und $\partial_{G(C, d)} \circ \partial_{G(C, c)}$ zueinander? Bis auf die Ordnung auf den Bögen und Kanten gibt es für C die Möglichkeiten aus den Abbildungen 3 und 4.

Man rechnet leicht nach, dass $\partial_{G(C, b)} \circ \partial_{G(C, a)} = \partial_{G(C, d)} \circ \partial_{G(C, c)}$ in den Fällen 1-21 und 29-37. Wir nennen C dann vom Typ K. Weiterhin gilt $\partial_{G(C, b)} \circ \partial_{G(C, a)} = -\partial_{G(C, d)} \circ \partial_{G(C, c)}$ in den Fällen 22-28 und 38-43. Wir nennen C dann vom Typ A. In den Fällen 44/45 nennen wir C vom Typ X/Y. Dann gilt $\partial_{G(C, b)} \circ \partial_{G(C, a)} = 0 = \partial_{G(C, d)} \circ \partial_{G(C, c)}$. Wir nennen eine orientierte zweidimensionale Konfiguration vom Typ K, A, X, Y, falls der aktive Teil vom Typ K, A, X, Y ist. Auf diese Weise lässt sich auch einer der Fälle 1-45 zuordnen.

Definition 11. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Abbildung $s : \Sigma(k, 1) \rightarrow \{-1, 1\}$ nennen wir eine Kantenzuordnung. Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$ seien $a, b, c, d \in \Sigma(k, 1)$ die an ε angrenzenden Kanten. Dann sei $p(\varepsilon, s) := s(a)s(b)s(c)s(d)$. Sei C eine k -dimensionale orientierte Konfiguration. Dann nennen wir eine Kantenzuordnung s bezüglich C vom Typ X, falls für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$ gilt

$$p(\varepsilon, s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ A oder X ist,} \\ -1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ K oder Y ist.} \end{cases}$$

Wir nennen s bezüglich C vom Typ Y, falls für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$ gilt

$$p(\varepsilon, s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ A oder Y ist,} \\ -1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ K oder X ist.} \end{cases}$$

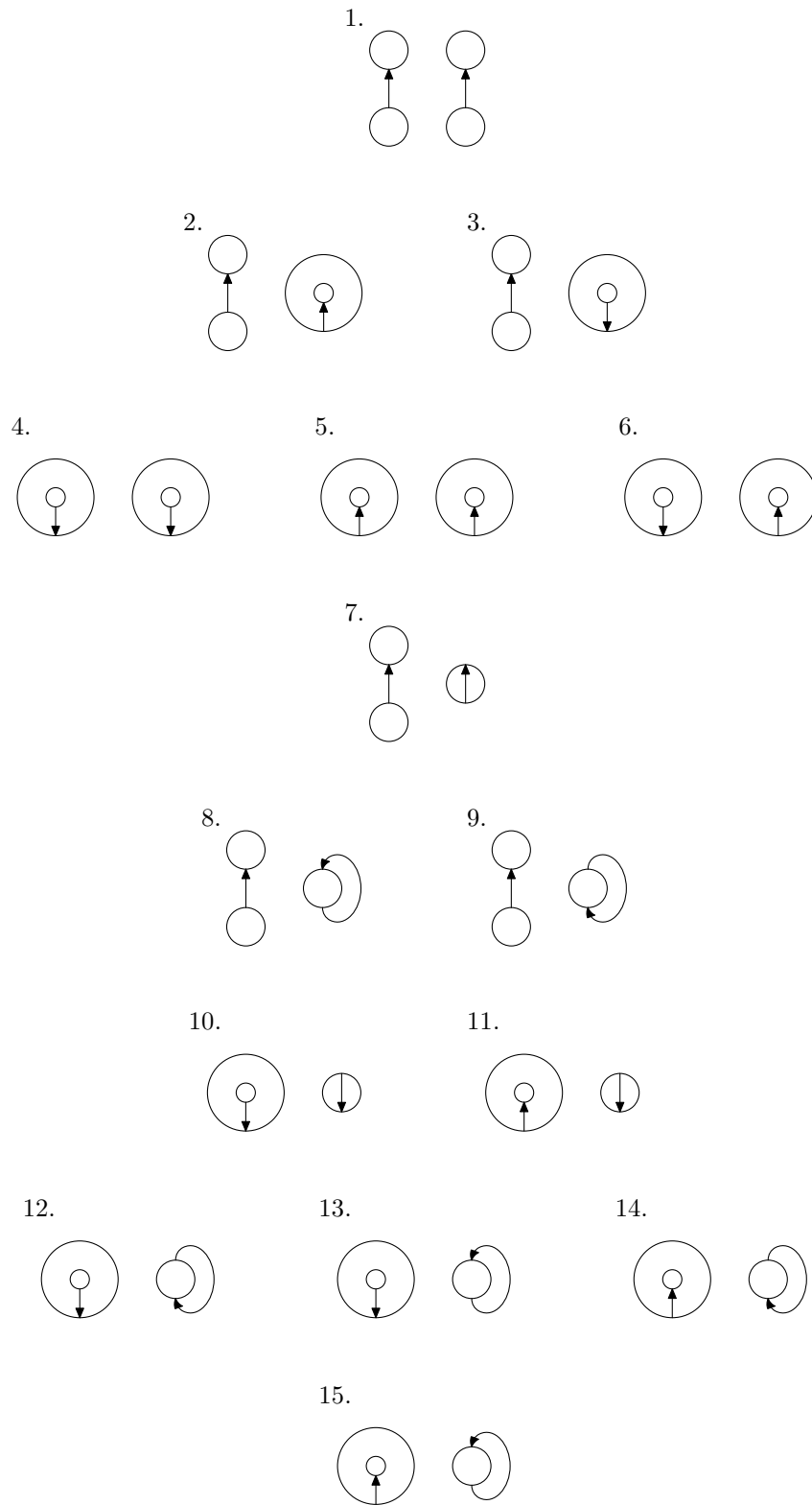


Abbildung 3: aktive orientierte zweidimensionale Konfigurationen

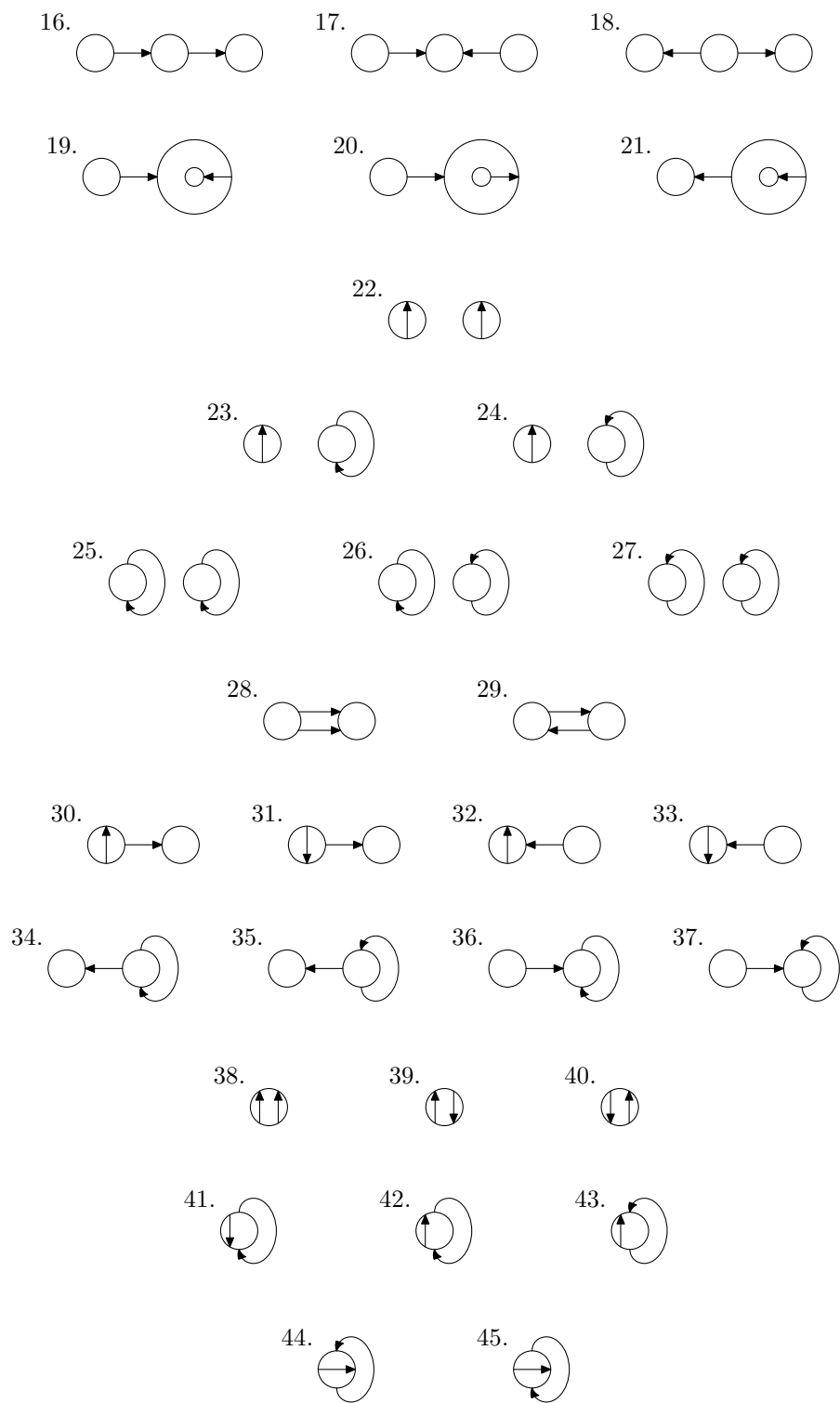


Abbildung 4: aktive orientierte zweidimensionale Konfigurationen

Satz 12. Für jede orientierte Konfiguration C gibt es eine Kantenzuordnung vom Typ X und eine Kantenzuordnung vom Typ Y .

Diesen Satz werden wir später beweisen. Für s vom Typ X, Y erhalten wir den Kettenkomplex

$$\Gamma(C, s) := \left(\Gamma(C) = \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k, 0)} \Lambda V(G(C, \varepsilon)), \partial(C, s) := \bigoplus_{\eta \in \Sigma(k, 1)} s(\eta) \partial_{G(C, \eta)} \right).$$

Wir erhalten eine Bigraduierung auf $\Gamma(C)$ folgendermaßen: Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 0)$ sei $|\varepsilon| := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$. Dann sei

$$\Gamma(C)^h := \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k, 0), |\varepsilon|=h} \Lambda V(G(C, \varepsilon)).$$

Für eine (orientierte) Konfiguration C sei $|C|$ die Anzahl der Kreise von C . Es sei

$$\Gamma(C)_\delta := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0, \varepsilon \in \Sigma(k, 0): |G(C, \varepsilon)| - 2m - |\varepsilon| = \delta} \Lambda^m V(G(C, \varepsilon)).$$

Weiterhin sei $\Gamma(C)_{h, \delta} := \Gamma(C)^h \cap \Gamma(C)_\delta$. Es gilt $\Gamma(C) = \bigoplus_{h, \delta \in \mathbb{Z}} \Gamma(C)_{h, \delta}$. Das Differential $\partial(C, s)$ erhöht den h -Grad um 1 und senkt den δ -Grad um 2.

Satz 13. Seien C und D orientierte Konfigurationen, so dass $\overline{C} = \overline{D}$. Seien s und t Kantenzuordnungen, so dass s bezüglich C den gleichen Typ (X oder Y) hat, wie t bezüglich D . Dann sind $\Gamma(C, s)$ und $\Gamma(D, t)$ isomorph als bigraduierte Kettenkomplexe.

Diesen Satz werden wir später beweisen.
Sei D nun ein Verschlingungsdiagramm.

Definition 14. Es seien $n_+(D)$ und $n_-(D)$ die Anzahlen der Plus- und Minus-Kreuzungen von D , siehe Abbildung 5.



Abbildung 5: Kreuzungen im Verschlingungsdiagramm

Definition 15. Man kann aus D eine Konfiguration C erhalten, indem man die Orientierung auf D vergisst und dann D in kleinen Umgebungen der Kreuzungen wie in Abbildung 6 verändert. C ist bis auf die Ordnungen auf den Bögen und Kanten eindeutig festgelegt. Wir nennen C eine Nullglättung von D .

Sei C eine orientierte Konfiguration, so dass \overline{C} eine Nullglättung von D ist. Es sei $\Gamma(D, C)^h := \Gamma(C)^{h+n_-(D)}$ und $\Gamma(D, C)_\delta := \Gamma(C)_{\delta-n_+(D)}$. Weiterhin sei s eine Kantenzuordnung vom Typ X oder vom Typ Y bezüglich C . Dann sei $\Gamma(D, C, s)$ der bigraduierte Kettenkomplex, der sich nur wie beschrieben in der Bigraduierung von $\Gamma(C, s)$ unterscheidet. Wir nennen ihn den ungeraden Khovanov-Kettenkomplex zu (D, C, s) .

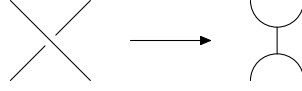


Abbildung 6: Nullglättung

Satz 16. Seien D_1 und D_2 Verschlingungsdiagramme, die durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen auseinander hervorgehen. Dann gibt es orientierte Konfigurationen C_1, C_2 , so dass $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ Nullglättungen von D_1, D_2 sind und Kantenzuordnungen s_1, s_2 , so dass s_1 bezüglich C_1 und s_2 bezüglich C_2 Typ X hat und so dass die Homologiegruppen $H_{h,\delta}(\Gamma(D_1, C_1, s_1))$ und $H_{h,\delta}(\Gamma(D_2, C_2, s_2))$ isomorph sind. Der Satz gilt analog für Typ Y.

Wir werden den Satz später beweisen.

Wir ordnen also einer Verschlingung zwei Isomorphieklassen von bigraduierten abelschen Gruppen zu, die ungerade Khovanov-Homologie vom Typ X und die ungerade Khovanov-Homologie vom Typ Y. Das nächste Korollar zeigt, dass beide gleich sind.

Korollar 17. Sei C orientierte Konfiguration. Sei s Kantenzuordnung vom Typ X und t Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Dann sind die Homologiegruppen $H_{h,\delta}(\Gamma(C, s))$ und $H_{h,\delta}(\Gamma(C, t))$ isomorph.

Beweis. Sei k die Dimension von C . Dann gilt für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$: Ist $G(C, \varepsilon)$ vom Typ A,K,X,Y, so ist $G(r(m(C)), \varepsilon)$ vom Typ A,K,Y,X. Also ist s vom Typ Y bezüglich $r(m(C))$. Man sieht leicht: Der kanonische Isomorphismus der bigraduierten abelschen Gruppen $\Gamma(C)$ und $\Gamma(r(m(C)))$ liefert auch einen Isomorphismus der Kettenkomplexe $\Gamma(C, s)$ und $\Gamma(r(m(C)), s)$. Sei D_1 ein Verschlingungsdiagramm, so dass \overline{C} Nullglättung von D_1 ist. Sei D_2 das Verschlingungsdiagramm, das man aus D_1 erhält, wenn man die Orientierung der S^2 umkehrt und bei allen Kreuzungen oben und unten vertauscht. Sei L eine Verschlingung, die durch Parallelprojektion auf D_1 abgebildet wird. Kehrt man die Projektionsrichtung um, so wird L auf D_2 abgebildet. Also geht $\overline{D_2}$ durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen aus D_1 hervor. Weiterhin ist $\overline{m(C)}$ Nullglättung von D_2 . Es folgt

$$\begin{aligned} H_{h,\delta}(\Gamma(C, s)) &\cong H_{h,\delta}(\Gamma(r(m(C)), s)) \cong H_{h-n_-(D_2), \delta+n_+(D_2)}(\Gamma(D_2, r(m(C)), s)) \\ &\cong H_{h-n_-(D_1), \delta+n_+(D_1)}(\Gamma(D_1, C, t)) \cong H_{h,\delta}(\Gamma(C, t)). \end{aligned}$$

□

Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir im Folgenden den Original-Khovanov-Kettenkomplex als geraden Khovanov-Kettenkomplex. Man sieht leicht:

Satz 18. Sei D ein Verschlingungsdiagramm, C eine orientierte Konfiguration, so dass \overline{C} eine Nullglättung von D ist und s eine Kantenzuordnung vom Typ X oder vom Typ Y bezüglich C . Dann ist der bigraduierte Kettenkomplex $\Gamma(D, C, s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph zum geraden Khovanov-Kettenkomplex von D mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten mit (h, δ) -Graduierung.

Durch $q = \delta + 2h$ erhalten wir auf dem geraden wie auf dem ungeraden Khovanov-Kettenkomplex eine weitere Graduierung. Das Differential lässt den q -Grad unverändert. Bilden wir bezüglich der h -Graduierung die Euler-Charakteristik der geraden Khovanov-Homologie einer Verschlingung, so erhalten wir durch die q -Graduierung ein Laurent-Polynom. Dies ist das Jones-Polynom der Verschlingung. Aus vorherigem Satz folgt, dass dies auch für ungerade Khovanov-Homologie gilt.

4 Existenz und Invarianz der ungeraden Khovanov-Homologie

Sei C eine orientierte dreidimensionale Konfiguration. Dann sei

$$a_C := \# \left\{ \varepsilon \in \sum (3, 2) \mid G(C, \varepsilon) \text{ ist vom Typ A.} \right\}.$$

Entsprechend seien k_C , x_C und y_C für die Typen K, X und Y definiert. Es sei $\text{Typ}_C := (a_C, k_C, x_C, y_C)$.

Lemma 19. *Für jede orientierte dreidimensionale Konfiguration C gilt: Die Summen $a_C + x_C$ und $a_C + y_C$ sind gerade Zahlen.*

Definition 20. Für zwei nichtorientierte Konfigurationen C_1 , C_2 sagen wir, diese gehen durch Rotation auseinander hervor, falls wir C_2 durch endlich viele lokale Veränderungen wie in Abbildung 7 aus C_1 erhalten können.

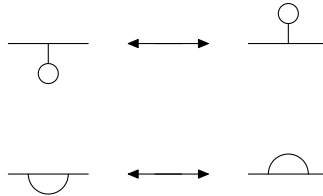


Abbildung 7: Rotation

Beweis von Lemma 19. Man sieht leicht: Sind C_1 , C_2 zwei nichtorientierte dreidimensionale Konfigurationen, die durch Rotation auseinander hervorgehen, dann gilt: Für jede Orientierung auf C_1 gibt es eine Orientierung auf C_2 , so dass $\text{Typ}_{C_1} = \text{Typ}_{C_2}$.

Für eine orientierte dreidimensionale Konfiguration C hängt Typ_C nur vom aktiven Teil von C ab.

In Abbildung 8 ist aufgelistet, welche Möglichkeiten es für eine zusammenhängende, nichtorientierte, dreidimensionale Konfiguration modulo Rotation gibt. Für jede Möglichkeit ist angegeben, welche Möglichkeiten es für Typ_C gibt, wenn wir eine Orientierung wählen. Dies lässt sich leicht überprüfen.

Bleibt noch der Fall zu betrachten, dass C eine aktive, nicht zusammenhängende, orientierte, dreidimensionale Konfiguration ist. Dann gibt es eine Komponente, die genau einen Bogen enthält. Ohne Einschränkung sei dies der erste Bogen in der Ordnung der Bögen. Dann ist $G(C, (0, *, *))$ vom gleichen Typ wie

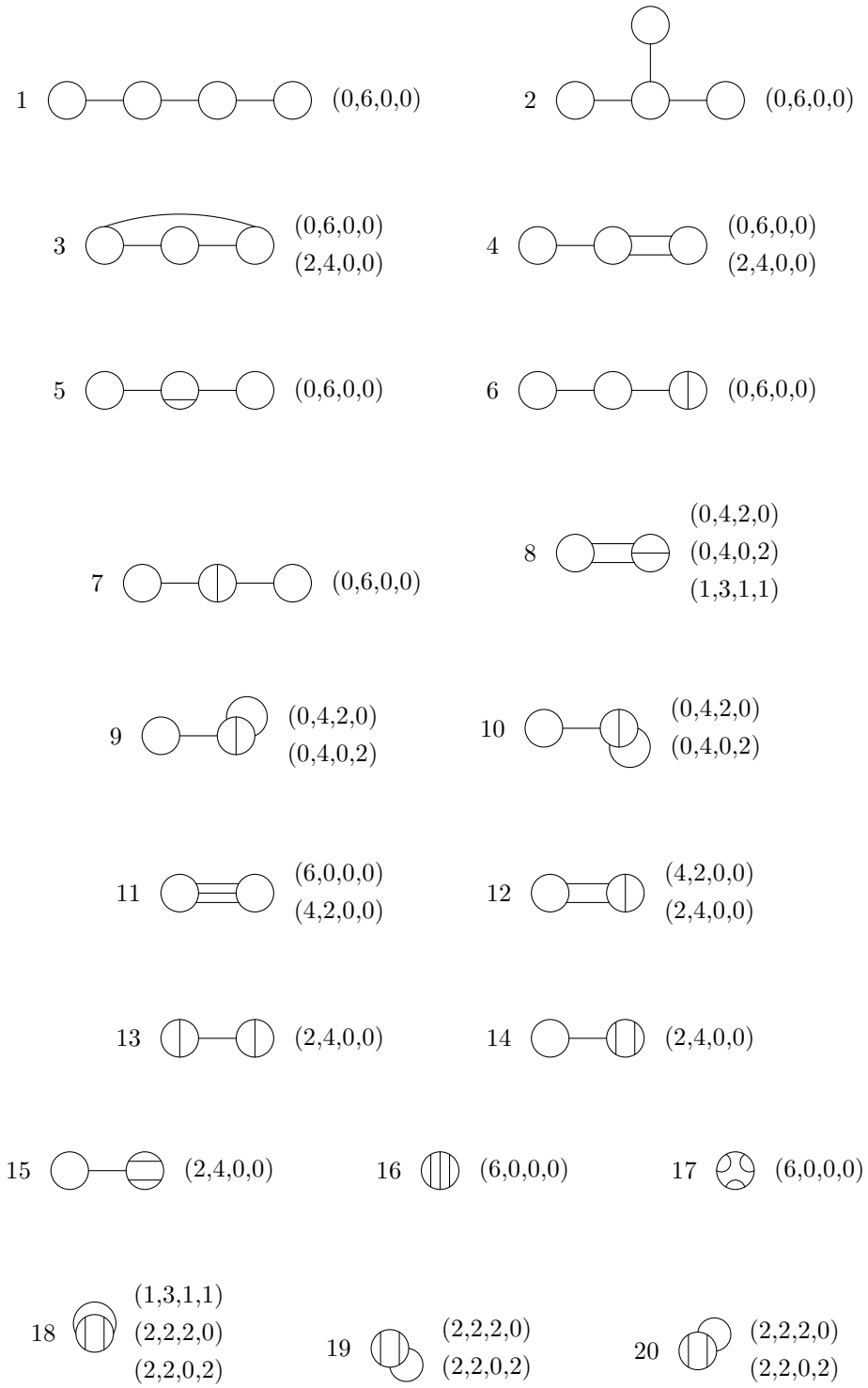


Abbildung 8: zusammenhängende dreidimensionale Konfigurationen modulo Rotation mit Möglichkeiten für Typ_C

$G(C, (1, *, *))$.

Ist $G(C, (*, 0, 0))$ eine Fusion, so sind $G(C, (*, *, 0))$, $G(C, (*, *, 1))$, $G(C, (*, 0, *))$ und $G(C, (*, 1, *))$ alle vom Typ K.

Sei nun $G(C, (*, 0, 0))$ eine Spaltung. Dann ist $G(C, (*, *, 0))$ vom Typ K, falls $G(C, (0, *, 0))$ eine Fusion ist, sonst vom Typ A. Analog für $(*, *, 1)$ und $(0, *, 1)$, für $(*, 0, *)$ und $(0, 0, *)$, für $(*, 1, *)$ und $(0, 1, *)$. Von $G(C, (0, *, 0))$, $G(C, (0, *, 1))$, $G(C, (0, 0, *))$ und $G(C, (0, 1, *))$ sind aber die Anzahlen der Fusionen und Spaltungen jeweils gerade. \square

Beweis von Satz 12. Wir zeigen den Satz für Typ X, für Typ Y funktioniert es analog. Sei F die multiplikative Gruppe mit Elementen $-1, 1$. Sei C orientierte k -dimensionale Konfiguration. Wir erhalten eine CW-Struktur auf dem Hyperwürfel $Q := [0, 1]^k$ durch die n -dimensionalen Seiten $\Sigma(k, n)$ für $n \leq k$. Wir definieren eine zelluläre 2-Kokette $\phi \in C_{\text{cell}}^2(Q; F)$, die jedem $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$ das Element $1 \in F$ zuordnet, falls $G(C, \varepsilon)$ vom Typ A oder X ist und das Element $-1 \in F$, falls $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K oder Y ist. Wegen Lemma 19 ist ϕ ein Kozykel. Weil Q zusammenziehbar ist, ist ϕ Korand. Also gibt es eine Kantenzuordnung vom Typ X. \square

Lemma 21. *Sei C orientierte Konfiguration. Seien s und t Kantenzuordnungen vom gleichen Typ (X oder Y) bezüglich C . Dann sind $\Gamma(C, s)$ und $\Gamma(C, t)$ isomorph als bigraduierte Kettenkomplexe.*

Beweis. Seien die Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 12. Dann ist $st \in C_{\text{cell}}^1(Q; F)$ ein Kozykel und somit auch Korand. Es gibt also $\eta : \Sigma(k, 0) \rightarrow \{-1, 1\}$, so dass für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 1)$ gilt $\eta(\varepsilon^0)\eta(\varepsilon^1) = s(\varepsilon)t(\varepsilon)$. Wir erhalten den gesuchten Isomorphismus, indem wir für alle $\theta \in \Sigma(k, 0)$ auf $\Delta V(G(C, \theta))$ mit $\eta(\theta)$ multiplizieren. \square

Lemma 22. *Seien C und D orientierte Konfigurationen, so dass $\overline{C} = \overline{D}$ und s eine Kantenzuordnung vom Typ X oder Y bezüglich C . Dann gibt es eine Kantenzuordnung t , so dass t bezüglich D den gleichen Typ hat, wie s bezüglich C und so dass die bigraduierten Kettenkomplexe $\Gamma(C, s)$ und $\Gamma(D, t)$ gleich sind.*

Beweis. Wir zeigen den Satz für Typ X, für Typ Y funktioniert es analog. Es reicht, den Fall zu betrachten, wenn sich C und D nur durch die Orientierung eines Bogens unterscheiden. Ohne Einschränkungen sei dies der erste Bogen in der Ordnung der Bögen. Sei $\alpha : \Sigma(k, 1) \rightarrow \{-1, 1\}$ definiert durch

$$\alpha(\varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \varepsilon_1 = * \text{ und } G(C, \varepsilon) \text{ eine Spaltung ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 1)$ gilt $\partial_{G(C, \varepsilon)} = \alpha(\varepsilon)\partial_{G(D, \varepsilon)}$. Sei $\phi : \Sigma(k, 2) \rightarrow \{-1, 1\}$ definiert durch

$$\phi(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ A oder X ist,} \\ -1 & \text{falls } G(C, \varepsilon) \text{ vom Typ K oder Y ist.} \end{cases}$$

Analog sei $\psi : \Sigma(k, 2) \rightarrow \{-1, 1\}$ für D definiert. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 12 sind $\phi, \psi \in C_{\text{cell}}^2(Q; F)$ und $\alpha \in C_{\text{cell}}^1(Q; F)$. Es gilt $\psi = \phi d^1(\alpha)$. Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$, für die die erste Komponente ungleich $*$ ist, ist dies klar. Sei nun die erste Komponente von ε gleich $*$. Ist $G(C, \varepsilon)$ einer der Fälle 1-27 oder 30-43

aus den Abbildungen 3 und 4, so haben $G(C, \varepsilon)$ und $G(D, \varepsilon)$ den gleichen Typ und α ist auf genau null oder genau zwei der vier an ε angrenzenden Kanten -1 . Ist $G(C, \varepsilon)$ Fall 28, 29, 44, 45, so ist $G(D, \varepsilon)$ Fall 29, 28, 45, 44 und α ist auf genau einer an ε angrenzenden Kante -1 .
Es sei $t := \alpha s$. Aus $d^1(s) = \phi$ folgt $d^1(t) = \psi$, somit ist t eine Kantenzuordnung vom Typ X bezüglich D , so dass $\partial(C, s) = \partial(D, t)$. \square

Mit Lemma 21 und Lemma 22 ist Satz 13 bewiesen. Als Nächstes möchten wir Satz 16 beweisen.

Proposition 23 (RM1-Invarianz). *Seien D_1 und D_2 Verschlingungsdiagramme, die sich wie in Abbildung 9 lokal unterscheiden. Dann gilt die Aussage aus Satz 16.*



Abbildung 9: Reidemeister-Bewegung 1

Beweis. Seien C_1, s_1 beliebig. Eine Nullglättung von D_2 sieht wie in Abbildung 10 aus. Der im Bild vorkommende Kreis sei mit z der Bogen mit γ bezeichnet.

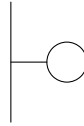


Abbildung 10: Nullglättung von D_2

C_2 sei so orientiert, dass alle Bögen außer γ die gleiche Orientierung haben wie in C_1 . Die Orientierung von γ sei beliebig. Sei γ der letzte Bogen in der Ordnung der Bögen, alle anderen Bögen seien geordnet wie in C_1 . Sei k die Dimension von C_1 . Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 0)$ ist $G(C_2, (\varepsilon, 1)) = G(C_1, \varepsilon)$ und $G(C_2, (\varepsilon, 0))$ ist wie $G(C_1, \varepsilon)$ mit der lokalen Änderung wie in Abbildung 11. Für $a \in \Sigma(k, 1)$

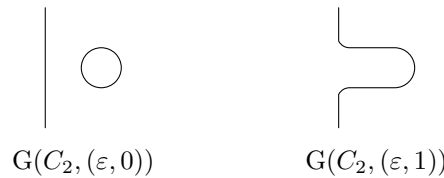


Abbildung 11:

sei $s_2(a, 0) := s_1(a)$ und $s_2(a, 1) := -s_1(a)$. Für $b \in \Sigma(k+1, 1)$ mit $b_{k+1} = *$ sei $s_2(b) := 1$. Man prüft leicht nach, dass s_2 bezüglich C_2 den gleichen Typ hat wie

s_1 bezüglich C_1 . Für $\varepsilon \in \Sigma(k+1, 0)$ mit $\varepsilon_{k+1} = 0$ sei $V_z(G(C_2, \varepsilon))$ die freie abelsche Gruppe, die von allen Kreisen von $G(C_2, \varepsilon)$ außer z erzeugt wird. Es sei

$$A := \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k+1, 0) \text{ mit } \varepsilon_{k+1}=0} \Lambda V_z(G(C_2, \varepsilon))$$

und ∂_A die Einschränkung von

$$\bigoplus_{\eta \in \Sigma(k+1, 1) \text{ mit } \eta_{k+1}=0} s_2(\eta) \partial_{G(C_2, \eta)}$$

auf A . Weiter sei

$$B := \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k+1, 0) \text{ mit } \varepsilon_{k+1}=1} \Lambda V(G(C_2, \varepsilon))$$

und

$$\partial_B := \bigoplus_{\eta \in \Sigma(k+1, 1) \text{ mit } \eta_{k+1}=1} s_2(\eta) \partial_{G(C_2, \eta)}$$

und $\partial_{A \rightarrow B}$ die Einschränkung von

$$\bigoplus_{\eta \in \Sigma(k+1, 1) \text{ mit } \eta_{k+1}=*} s_2(\eta) \partial_{G(C_2, \eta)}$$

auf A . $\partial_{A \rightarrow B}$ ist ein Isomorphismus der abelschen Gruppen A und B und es gilt $\partial_{A \rightarrow B} \circ \partial_A = -\partial_B \circ \partial_{A \rightarrow B}$. Somit ist der Unterkomplex $(A \oplus B, \partial_A \oplus \partial_B \oplus \partial_{A \rightarrow B})$ von $\Gamma(D_2, C_2, s_2)$ azyklisch. Der Quotientenkomplex ist isomorph als bigraduierter Kettenkomplex zu $\Gamma(D_1, C_1, s_1)$, da D_2 eine Plus-Kreuzung mehr hat als D_1 . \square

Proposition 24 (RM2-Invarianz). *Seien D_1 und D_2 Verschlingungsdiagramme, die sich wie in Abbildung 12 lokal unterscheiden. Dann gilt die Aussage aus Satz 16.*



Abbildung 12: Reidemeister-Bewegung 2

Beweis. Eine Nullglättung von D_2 sieht wie in Abbildung 13 aus. Seien C_2, s_2 beliebig, so dass α der erste und β der zweite Bogen in der Ordnung der Bögen



Abbildung 13: Nullglättung von D_2

seien. Sei $k + 2$ die Dimension von C_2 . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(D_2, C_2, s_2) \\
 = & \begin{array}{ccc} & \Gamma(G(C_2, (0, 1, *, \dots, *)), s_2|) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \Gamma(G(C_2, (0, 0, *, \dots, *)), s_2|) & & \Gamma(G(C_2, (1, 1, *, \dots, *)), s_2|) \\ \searrow & & \nearrow \\ & \Gamma(G(C_2, (1, 0, *, \dots, *)), s_2|) & \end{array} \\
 = & \begin{array}{ccc} & \text{Diagram 1} & \\ \nearrow & & \searrow \\ \text{Diagram 2} & & \text{Diagram 3} \\ \searrow & & \nearrow \\ & \text{Diagram 4} & \end{array}
 \end{aligned}$$

Es sei $C_1 := G(C_2, (0, 1, *, \dots, *))$ und für alle $a \in \Sigma(k, 1)$ sei $s_1(a) := s_2(0, 1, a)$. Im Beweis der RM1-Invarianz haben wir eine abelsche Gruppe A definiert. Analog sei nun A als Untergruppe von $\Gamma(G(C_2, (1, 0, *, \dots, *)))$ definiert. Dann ist $A \oplus \Gamma(G(C_2, (1, 1, *, \dots, *)))$ azyklischer Unterkomplex von $\Gamma(D_2, C_2, s_2)$. Den Quotientenkomplex nennen wir B . In B haben wir den Unterkomplex $C := \Gamma(G(C_2, (0, 1, *, \dots, *)), s_2|)$. Der Quotientenkomplex ist azyklisch. C ist isomorph als bigraduierter Kettenkomplex zu $\Gamma(D_1, C_1, s_1)$, da D_2 eine Plus- und eine Minus-Kreuzung mehr hat als D_1 . \square

Proposition 25 (RM3-Invarianz). *Seien D_1 und D_2 Verschlingungsdiagramme, die sich wie in Abbildung 14 lokal unterscheiden. Dann gilt die Aussage aus Satz 16.*



Abbildung 14: Reidemeister-Bewegung 3

Beweis. C_1 und C_2 sind in Abbildung 15 dargestellt. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sowie β_1, β_2 ,

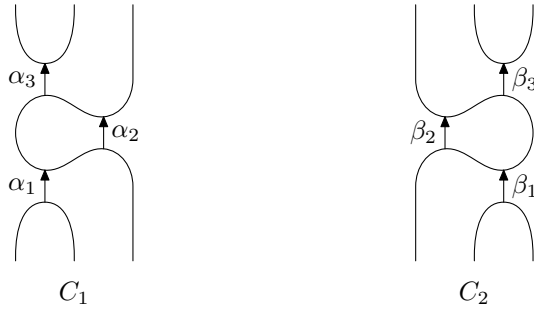


Abbildung 15:

β_3 sollen in den Ordnungen der Bögen an den ersten drei Stellen stehen. Die übrigen Bögen seien in C_1 und C_2 gleich geordnet und gleich orientiert. s_1 und s_2 seien beliebig, so dass s_1 bezüglich C_1 und s_2 bezüglich C_2 Typ X haben. Für Typ Y funktioniert der Beweis analog. Sei k die Dimension von C_1 und C_2 . $\Gamma(C_1, s_1)$ ist in Abbildung 16 dargestellt. Sei A analog zur RM1-Invarianz als Untergruppe von $\Gamma(G(C_1, (0, 1, 0, *, \dots, *)))$ definiert. Sei

$$R := A \oplus \bigoplus_{\varepsilon \in \sum(k, 0) \text{ mit } (0, 0, 0) \neq (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \neq (0, 1, 0)} \Lambda V(G(C_1, \varepsilon)).$$

R ist Unterkomplex von $\Gamma(C_1, s_1)$ und der Quotientenkomplex ist azyklisch. Sei ∂_R die Randabbildung von R . Dann ist $\{a + \partial_R(b) \mid a, b \in A\}$ azyklischer Unterkomplex von R . Der Quotientenkomplex sei mit P bezeichnet. $\Gamma(C_2, s_2)$ ist in Abbildung 17 dargestellt. Analog zu R können wir einen Unterkomplex S von $\Gamma(C_2, s_2)$ definieren. Analog zu P können wir einen Quotientenkomplex Q von S definieren, dessen Homologie isomorph zur Homologie von $\Gamma(C_2, s_2)$ ist. Bleibt noch zu zeigen, dass die Komplexe P und Q isomorph sind. Es sei $C_3 := G(C_1, (1, *, \dots, *)) = G(C_2, (*, *, 1, *, \dots, *))$ und $C_4 := G(C_1, (*, *, 1, *, \dots, *)) = G(C_2, (1, *, \dots, *))$, siehe Abbildung 18. s_1 und s_2 induzieren Kantenzuordnungen s_1^3, s_2^3 vom Typ X bezüglich C_3 und s_1^4, s_2^4 vom Typ X bezüglich C_4 . Der Beweis von Lemma 21 zeigt: Es gibt $\eta_3, \eta_4 : \sum(k-1, 0) \rightarrow \{-1, 1\}$, so dass für alle $\varepsilon \in \sum(k-1, 1)$ gilt:

$$\begin{aligned} \eta_3(\varepsilon^0) \eta_3(\varepsilon^1) &= s_1^3(\varepsilon) s_2^3(\varepsilon) \\ \eta_4(\varepsilon^0) \eta_4(\varepsilon^1) &= s_1^4(\varepsilon) s_2^4(\varepsilon) \end{aligned}$$

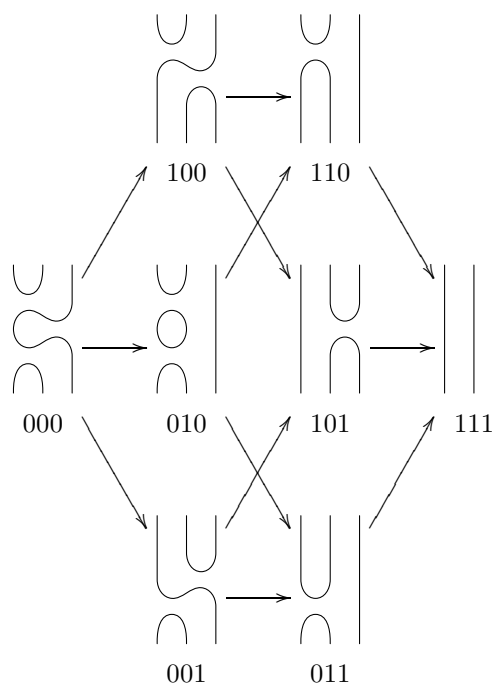


Abbildung 16: $\Gamma(C_1, s_1)$

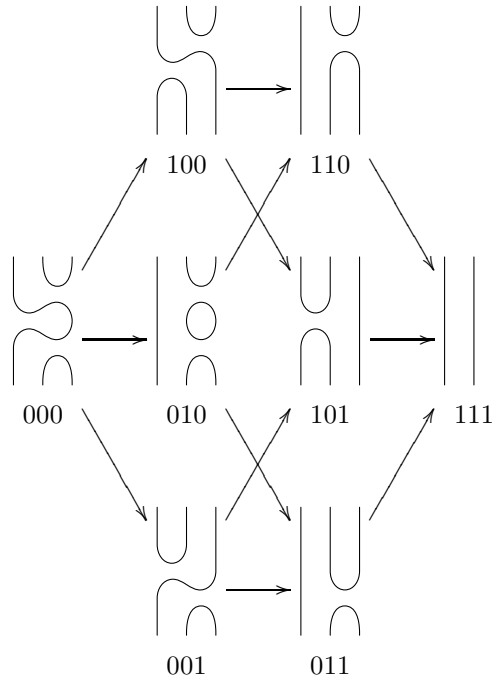


Abbildung 17: $\Gamma(C_2, s_2)$

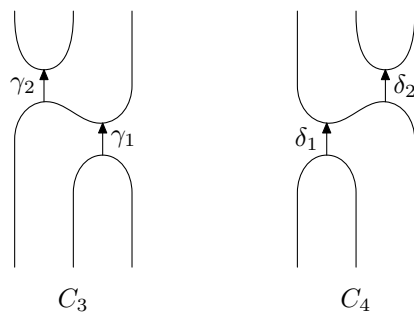


Abbildung 18:

Für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 1)$ gilt:

$$s_1^3(1, 1, \varepsilon) = s_1^4(1, 1, \varepsilon) \quad (26)$$

$$s_1^3(0, 1, \varepsilon) = s_1^4(1, 0, \varepsilon) \quad (27)$$

$$s_2^3(1, 1, \varepsilon) = s_2^4(1, 1, \varepsilon) \quad (28)$$

$$s_2^3(1, 0, \varepsilon) = s_2^4(0, 1, \varepsilon) \quad (29)$$

Für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 0)$ gilt:

$$s_1^3(*, 1, \varepsilon) = s_1^4(1, *, \varepsilon) \quad (30)$$

$$s_2^3(1, *, \varepsilon) = s_2^4(*, 1, \varepsilon) \quad (31)$$

Aus Gleichung (26) und (28) folgt: Entweder gilt $\eta_3(1, 1, \varepsilon) = \eta_4(1, 1, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 0)$ oder für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 0)$ gilt $\eta_3(1, 1, \varepsilon) = -\eta_4(1, 1, \varepsilon)$. Im zweiten Fall können wir η_4 mit -1 multiplizieren, so dass wir stets vom ersten Fall ausgehen können. Dann gilt für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 0)$:

$$\eta_3(0, 1, \varepsilon)\eta_4(1, 0, \varepsilon) = s_2^3(*, 1, \varepsilon)s_2^4(1, *, \varepsilon) = s_2(1, 1, \varepsilon)s_2(1, *, \varepsilon) \quad (\text{wegen Gleichung (30)}) \quad (32)$$

$$\eta_3(1, 0, \varepsilon)\eta_4(0, 1, \varepsilon) = s_1^3(1, *, \varepsilon)s_1^4(*, 1, \varepsilon) = s_1(1, 1, \varepsilon)s_1(*, 1, \varepsilon) \quad (\text{wegen Gleichung (31)}) \quad (33)$$

Für $i = 1, 2$ ist ein Element aus $\Gamma(C_i)$ ein Paar (ω, ε) mit $\varepsilon \in \sum(k, 0)$ und $\omega \in \Lambda V(G(C_i, \varepsilon))$. Nun können wir einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $P \rightarrow Q$ angeben, wir bilden für alle $\varepsilon \in \sum(k-3, 0)$ wie folgt ab:

$$[(\omega, (1, 0, 0, \varepsilon))] \mapsto \eta_3(0, 0, \varepsilon)[(\omega, (0, 0, 1, \varepsilon))]$$

$$[(\omega, (0, 0, 1, \varepsilon))] \mapsto \eta_4(0, 0, \varepsilon)[(\omega, (1, 0, 0, \varepsilon))]$$

$$[(\omega, (1, 0, 1, \varepsilon))] \mapsto \eta_3(0, 1, \varepsilon)[(\omega, (0, 1, 1, \varepsilon))] = \eta_4(1, 0, \varepsilon)[(\omega, (1, 1, 0, \varepsilon))]$$

(weil $G(C_2, (*, 1, *, \varepsilon))$ vom Typ K ist und wegen Gleichung (32))

$$[(\omega, (1, 1, 0, \varepsilon))] \mapsto \eta_3(1, 0, \varepsilon)[(\omega, (1, 0, 1, \varepsilon))]$$

$$[(\omega, (0, 1, 1, \varepsilon))] \mapsto \eta_4(0, 1, \varepsilon)[(\omega, (1, 0, 1, \varepsilon))]$$

Die beiden letzten Abbildungsvorschriften passen zusammen,

weil $G(C_1, (*, 1, *, \varepsilon))$ vom Typ K ist und wegen Gleichung (33).

$$[(\omega, (1, 1, 1, \varepsilon))] \mapsto \eta_3(1, 1, \varepsilon)[(\omega, (1, 1, 1, \varepsilon))] = \eta_4(1, 1, \varepsilon)[(\omega, (1, 1, 1, \varepsilon))]$$

□

5 Spektralsequenzen

In diesem Kapitel werden wir uns an dem Buch von Weibel orientieren ([5]).

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 34. Eine Spektralsequenz vom Grad $k \in \mathbb{Z}$ besteht aus folgenden Daten:

1. einer Familie $E_{p,q}^r$ von R -Moduln definiert für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ (für ein festes r werden die $E_{p,q}^r$ der E^r -Term der Spektralsequenz genannt)

2. Homomorphismen $d_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r+k}^r$ die $d^r \circ d^r = 0$ erfüllen

3. Isomorphismen $f_{p,q}^r : H_{p,q}(E^r, d^r) := \ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r-k}^r) \rightarrow E_{p,q}^{r+1}$

Definition 35. Sei (E, d, f) eine Spektralsequenz vom Grad k . Dann sei $\pi_{p,q}^r : \ker(d_{p,q}^r) \rightarrow H_{p,q}(E^r, d^r)$ die kanonische Projektion. Für $r \geq 1$ definiere

$$Z_{p,q}^{r,r-1} := \ker(d_{p,q}^{r-1}) \subset E_{p,q}^{r-1} \text{ und} \\ Z_{p,q}^{r,s} := (f_{p,q}^s \circ \pi_{p,q}^s)^{-1}(Z_{p,q}^{r,s+1}) \subset E_{p,q}^s$$

für $0 \leq s \leq r-2$. Es sei $Z_{p,q}^r := Z_{p,q}^{r,0} \subset E_{p,q}^0$. Für $r = 0$ sei $Z_{p,q}^0 := E_{p,q}^0$. Definiere für $r \geq 1$ weiterhin

$$B_{p,q}^{r,r-1} := \text{im}(d_{p+r-1,q-r-k+1}^{r-1}) \subset E_{p,q}^{r-1} \text{ und} \\ B_{p,q}^{r,s} := (f_{p,q}^s \circ \pi_{p,q}^s)^{-1}(B_{p,q}^{r,s+1}) \subset E_{p,q}^s$$

für $0 \leq s \leq r-2$. Es sei $B_{p,q}^r := B_{p,q}^{r,0} \subset E_{p,q}^0$. Für $r = 0$ sei $B_{p,q}^0 := \{0\}$.

Offensichtlich gilt

$$\{0\} = B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^1 \subset \dots \subset B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1} \subset \dots \subset Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r \subset \dots \subset Z_{p,q}^1 \subset Z_{p,q}^0 = E_{p,q}^0$$

und $E_{p,q}^r \cong Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r$.

Definition 36.

$$B_{p,q}^\infty := \bigcup_{r=0}^{\infty} B_{p,q}^r \\ Z_{p,q}^\infty := \bigcap_{r=0}^{\infty} Z_{p,q}^r \\ E_{p,q}^\infty := Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty$$

Die $E_{p,q}^\infty$ werden der E^∞ -Term der Spektralsequenz genannt.

Bemerkung 37. Sei $r_0 \in \mathbb{N}_0$. Gilt für alle feste $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle $r \geq r_0$ die Gleichung $d_{p,q}^r = 0 = d_{p+r,q-r-k}^r$ so ist $Z_{p,q}^{r_0} = Z_{p,q}^{r_0+1} = \dots = Z_{p,q}^\infty$ und $B_{p,q}^{r_0} = B_{p,q}^{r_0+1} = \dots = B_{p,q}^\infty$. Es folgt $E_{p,q}^\infty \cong E_{p,q}^{r_0}$ für $r \geq r_0$.

Wir erhalten kurze exakte Sequenzen der Form

$$0 \rightarrow Z_{p,q}^{r+1} / B_{p,q}^r \rightarrow Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r \xrightarrow{\tilde{d}_{p,q}^r} B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r \rightarrow 0,$$

wobei $\tilde{d}_{p,q}^r$ von $d_{p,q}^r$ induziert ist. Dadurch erhalten wir Isomorphismen $Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \cong B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r$.

Haben wir umgekehrt R -Moduln $B_{p,q}^r$ und $Z_{p,q}^r$ gegeben, die

$$\{0\} = B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^1 \subset \dots \subset B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1} \subset \dots \subset Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r \subset \dots \subset Z_{p,q}^1 \subset Z_{p,q}^0$$

erfüllen und zusätzlich Isomorphismen $g_{p,q}^r : Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \rightarrow B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so erhalten wir eine Spektralsequenz vom Grad k wie folgt: Es sei $E_{p,q}^r := Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r$. Durch $g_{p,q}^r$ erhalten wir kurze exakte Sequenzen der Form

$$0 \rightarrow Z_{p,q}^{r+1} / B_{p,q}^r \rightarrow Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r \rightarrow B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r \rightarrow 0,$$

wodurch $d_{p,q}^r$ definiert ist. Offensichtlich gilt $d^r \circ d^r = 0$. Die Isomorphismen $f_{p,q}^r$ erhalten wir durch

$$\ker(d_{p,q}^r) / \text{im}(d_{p+r,q-r-k}^r) = (Z_{p,q}^{r+1} / B_{p,q}^r) / (B_{p,q}^{r+1} / B_{p,q}^r) \cong Z_{p,q}^{r+1} / B_{p,q}^{r+1} = E_{p,q}^{r+1}.$$

Definition 38. Seien (E, d, f) und $(\hat{E}, \hat{d}, \hat{f})$ Spektralsequenzen vom Grad k . Ein Morphismus zwischen diesen Spektralsequenzen besteht aus R -Modul-Homomorphismen $\varphi_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow \hat{E}_{p,q}^r$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$, die Folgendes erfüllen:

1. $\hat{d}_{p,q}^r \circ \varphi_{p,q}^r = \varphi_{p-r,q+r+k}^r \circ d_{p,q}^r$
2. φ^{r+1} ist die von φ^r auf Homologie induzierte Abbildung.

Somit ist φ schon durch φ^0 festgelegt. Diese Definition macht die Spektralsequenzen vom Grad k zu einer Kategorie $\text{Spek}(k)$. Ist φ ein Morphismus in $\text{Spek}(k)$ und ist $\varphi_{p,q}^0$ ein Isomorphismus von R -Moduln für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, so ist φ ein Isomorphismus. Für einen Morphismus φ in $\text{Spek}(k)$ gilt $\varphi_{p,q}^0(Z_{p,q}^r) \subset \hat{Z}_{p,q}^r$ und $\varphi_{p,q}^0(B_{p,q}^r) \subset \hat{B}_{p,q}^r$. Es folgt $\varphi_{p,q}^0(Z_{p,q}^\infty) \subset \hat{Z}_{p,q}^\infty$ und $\varphi_{p,q}^0(B_{p,q}^\infty) \subset \hat{B}_{p,q}^\infty$. Wir erhalten also R -Modul-Homomorphismen $\varphi_{p,q}^\infty : E_{p,q}^\infty \rightarrow \hat{E}_{p,q}^\infty$. Somit erhalten wir für $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ den Funktor $\mathfrak{T}^r(k) : \text{Spek}(k) \rightarrow \text{BG-}R\text{-Mod}$ mit Ziel in den bigraduierten R -Moduln, der einer Spektralsequenz vom Grad k ihren E^r -Term zuordnet.

Lemma 39. Ist φ ein Morphismus in $\text{Spek}(k)$ und ist $\varphi_{p,q}^{r_0}$ ein Isomorphismus für ein $r_0 \in \mathbb{N}_0$ und für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ (dann ist auch $\varphi_{p,q}^r$ ein Isomorphismus für $r > r_0$), so sind die $\varphi_{p,q}^\infty$ Isomorphismen.

Beweis. Definiere

$$\begin{aligned} B_{p,q}^{\infty,s} &:= \bigcup_{r=s+1}^{\infty} B_{p,q}^{r,s} \subset E_{p,q}^s \\ Z_{p,q}^{\infty,s} &:= \bigcap_{r=s+1}^{\infty} Z_{p,q}^{r,s} \subset E_{p,q}^s \\ E_{p,q}^{\infty,s} &:= Z_{p,q}^{\infty,s} / B_{p,q}^{\infty,s}. \end{aligned}$$

Es gilt $B_{p,q}^{\infty,0} = B_{p,q}^\infty$, $Z_{p,q}^{\infty,0} = Z_{p,q}^\infty$ und somit $E_{p,q}^{\infty,0} = E_{p,q}^\infty$. Außerdem ist $B_{p,q}^{\infty,s} = (f_{p,q}^s \circ \pi_{p,q}^s)^{-1}(B_{p,q}^{\infty,s+1})$ und $Z_{p,q}^{\infty,s} = (f_{p,q}^s \circ \pi_{p,q}^s)^{-1}(Z_{p,q}^{\infty,s+1})$. Es folgt $E_{p,q}^{\infty,s} \cong E_{p,q}^{\infty,s+1}$. $\varphi_{p,q}^{r_0}$ induziert einen Isomorphismus $E_{p,q}^{\infty,r_0} \cong \hat{E}_{p,q}^{\infty,r_0}$. Zusammen mit der von $\varphi_{p,q}^{r_0-1}$ induzierten Abbildung ergibt sich folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}_{p,q}^{\infty,r_0-1} & \xrightarrow{\cong} & \hat{E}_{p,q}^{\infty,r_0} \\ \uparrow & & \uparrow \cong \\ E_{p,q}^{\infty,r_0-1} & \xrightarrow{\cong} & E_{p,q}^{\infty,r_0} \end{array}$$

Somit ist die linke Abbildung auch ein Isomorphismus. Induktiv folgt, dass $\varphi_{p,q}^0$ einen Isomorphismus $E_{p,q}^{\infty,0} \cong \hat{E}_{p,q}^{\infty,0}$ induziert, also dass $\varphi_{p,q}^\infty$ ein Isomorphismus ist. \square

Wir erhalten eine weitere Kategorie $\text{BZ}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$ wie folgt: Ein Objekt besteht aus R -Moduln $B_{p,q}^r$ und $Z_{p,q}^r$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$, die

$$\{0\} = B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^1 \subset \cdots \subset B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1} \subset \cdots \subset Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r \subset \cdots \subset Z_{p,q}^1 \subset Z_{p,q}^0$$

erfüllen und zusätzlich aus Isomorphismen $g_{p,q}^r : Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \rightarrow B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r$. Ein Morphismus $(B, Z, g) \rightarrow (\hat{B}, \hat{Z}, \hat{g})$ besteht aus R -Modul-Homomorphismen $\psi_{p,q} : Z_{p,q}^0 \rightarrow \hat{Z}_{p,q}^0$, der folgendes erfüllt:

1. $\psi_{p,q}(Z_{p,q}^r) \subset \hat{Z}_{p,q}^r$
2. $\psi_{p,q}(B_{p,q}^r) \subset \hat{B}_{p,q}^r$
3. Die von ψ induzierten Abbildungen kommutieren mit g und \hat{g} .

Wir haben beschrieben wie wir einer Spektralsequenz vom Grad k ein Objekt aus $\text{BZ}(k)$ zuordnen und umgekehrt. Mit den kanonischen Abbildungen zwischen den Morphismenmengen erhalten wir Funktoren $\mathfrak{F}(k) : \text{Spek}(k) \rightarrow \text{BZ}(k)$ und $\mathfrak{G}(k) : \text{BZ}(k) \rightarrow \text{Spek}(k)$. Man kann leicht nachrechnen, dass gilt:

Lemma 40. $\mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{F}(k)$ ist natürlich isomorph zu $\text{id}_{\text{Spek}(k)}$ und $\mathfrak{F}(k) \circ \mathfrak{G}(k) = \text{id}_{\text{BZ}(k)}$. Somit sind $\text{Spek}(k)$ und $\text{BZ}(k)$ äquivalente Kategorien.

Korollar 41. Sei ψ ein Morphismus in der Kategorie $\text{BZ}(k)$ und seien alle $\psi_{p,q}$ Isomorphismen von R -Moduln, dann ist ψ ein Isomorphismus.

Korollar 42. Sei $\psi \in \text{Mor}_{\text{BZ}(k)}((B, Z, g), (\hat{B}, \hat{Z}, \hat{g}))$ und sei die induzierte Abbildung $Z_{p,q}^{r_0} / B_{p,q}^{r_0} \rightarrow \hat{Z}_{p,q}^{r_0} / \hat{B}_{p,q}^{r_0}$ ein Isomorphismus für ein $r_0 \in \mathbb{N}_0$ und für alle $p, q \in \mathbb{Z}$. Dann ist die induzierte Abbildung $Z_{p,q}^r / B_{p,q}^r \rightarrow \hat{Z}_{p,q}^r / \hat{B}_{p,q}^r$ ein Isomorphismus für alle $r > r_0$ und $p, q \in \mathbb{Z}$. Dies gilt auch für $r = \infty$.

Definition 43. Wir definieren die Kategorie Filt der filtrierten graduierten R -Moduln wie folgt: Ein Objekt besteht aus R -Moduln $F_i A_j$ für $i, j \in \mathbb{Z}$, so dass $\cdots \subset F_i A_j \subset \cdots \subset F_{i+1} A_j \subset \cdots \subset F_{i+2} A_j \subset \cdots$. Es sei $A_j := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F_i A_j$, $A := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} A_j$ und $F_i A := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F_i A_j$. Ein Morphismus $\alpha : (A, F) \rightarrow (\hat{A}, \hat{F})$ besteht aus Homomorphismen $\alpha_j : A_j \rightarrow \hat{A}_j$ mit $\alpha_j(F_i A_j) \subset \hat{F}_i \hat{A}_j$.

Definition 44. Die Kategorie $\text{FKK}(k)$ der filtrierten Kettenkomplexe vom Grad $k \in \mathbb{Z}$ sei wie folgt definiert. Ein Objekt besteht aus $(A, F) \in \text{Obj}(\text{Filt})$ und Homomorphismen $d_j : A_j \rightarrow A_{j+k}$ mit $d_{j+k} \circ d_j = 0$ und $d_j(F_i A_j) \subset F_i A_{j+k}$. Es sei $d := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} d_j : A \rightarrow A$. Ein Morphismus $\alpha : (A, F, d) \rightarrow (\hat{A}, \hat{F}, \hat{d})$ ist ein Morphismus in Filt , der zusätzlich noch $\hat{d}_j \circ \alpha_j = \alpha_{j+k} \circ d_j$ erfüllt.

Nun konstruieren wir einen Funktor $\mathfrak{L}(k) : \text{FKK}(k) \rightarrow \text{BZ}(k)$: Sei (A, F, d) ein filtrierter Kettenkomplex vom Grad k . Dann sei $\eta_{i,j} : F_i A_j \rightarrow F_i A_j / F_{i-1} A_j$ die kanonische Projektion und

$$K_{p,q}^r := \{a \in F_p A_{p+q} \mid d_{p+q}(a) \in F_{p-r} A_{p+q+k}\}$$

für $i, j, p, q, r \in \mathbb{Z}$. Definiere für $r \geq 0$:

$$\begin{aligned} Z_{p,q}^r &:= \eta_{p,p+q}(K_{p,q}^r) \\ B_{p,q}^r &:= \eta_{p,p+q}(d_{p+q-k}(K_{p+r-1,q-r-k+1}^{r-1})) \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\{0\} = B_{p,q}^0 \subset B_{p,q}^1 \subset \cdots \subset B_{p,q}^r \subset B_{p,q}^{r+1} \subset \cdots \subset Z_{p,q}^{r+1} \subset Z_{p,q}^r \subset \cdots \subset Z_{p,q}^1 \subset Z_{p,q}^0.$$

Es gilt $K_{p,q}^r \cap F_{p-1}A_{p+q} = K_{p-1,q+1}^{r-1}$ und somit $Z_{p,q}^r \cong K_{p,q}^r / K_{p-1,q+1}^{r-1}$. Es folgt

$$Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \cong \frac{K_{p,q}^r / K_{p-1,q+1}^{r-1}}{K_{p,q}^{r+1} / K_{p-1,q+1}^r} \cong \frac{K_{p,q}^r}{K_{p,q}^{r+1} + K_{p-1,q+1}^{r-1}}.$$

Weiterhin gilt $d_{p+q}(K_{p,q}^r) \cap F_{p-r-1}A_{p+q+k} = d_{p+q}(K_{p,q}^{r+1})$ und somit

$$B_{p-r,q+r+k}^{r+1} = \eta_{p-r,p+q+k}(d_{p+q}(K_{p,q}^r)) \cong d_{p+q}(K_{p,q}^r) / d_{p+q}(K_{p,q}^{r+1}).$$

Es folgt

$$B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r \cong \frac{d_{p+q}(K_{p,q}^r) / d_{p+q}(K_{p,q}^{r+1})}{d_{p+q}(K_{p-1,q+1}^{r-1}) / d_{p+q}(K_{p-1,q+1}^r)} \cong \frac{d_{p+q}(K_{p,q}^r)}{d_{p+q}(K_{p,q}^{r+1} + K_{p-1,q+1}^{r-1})}.$$

Wegen $\ker(d_{p+q}) \cap K_{p,q}^r \subset K_{p,q}^{r+1}$ erhalten wir einen Isomorphismus $g_{p,q}^r : Z_{p,q}^r / Z_{p,q}^{r+1} \rightarrow B_{p-r,q+r+k}^{r+1} / B_{p-r,q+r+k}^r$. Somit haben wir einem Objekt aus $\text{FKK}(k)$ ein Objekt aus $\text{BZ}(k)$ zugeordnet. Es gilt $Z_{p,q}^r = F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q}$. Somit induziert ein $\alpha \in \text{Mor}_{\text{FKK}(k)}((A, F, d), (\hat{A}, \hat{F}, \hat{d}))$ R -Modul-Homomorphismen $Z_{p,q}^0 \rightarrow \hat{Z}_{p,q}^0$. Man prüft leicht nach, dass dies einen Morphismus $(B, Z, g) \rightarrow (\hat{B}, \hat{Z}, \hat{g})$ ergibt. Mit diesen Konstruktionen erhält man einen Funktor $\mathfrak{L}(k) : \text{FKK}(k) \rightarrow \text{BZ}(k)$.

Definition 45. Wir sagen eine Spektralsequenz (E, d, f) vom Grad k konvergiert gegen ein $(A, F) \in \text{Obj}(\text{Filt})$, falls $E_{p,q}^\infty \cong F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q}$ für alle p, q . Wir sagen ein $\varphi \in \text{Mor}_{\text{Spek}(k)}((E, d, f), (\hat{E}, \hat{d}, \hat{f}))$ konvergiert gegen ein $\alpha \in \text{Mor}_{\text{Filt}}((A, F), (\hat{A}, \hat{F}))$, falls es Isomorphismen $E_{p,q}^\infty \cong F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q}$ und $\hat{E}_{p,q}^\infty \cong \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-1} \hat{A}_{p+q}$ gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} E_{p,q}^\infty & \xrightarrow{\cong} & F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \\ \varphi_{p,q}^\infty \downarrow & & \downarrow \\ \hat{E}_{p,q}^\infty & \xrightarrow{\cong} & \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-1} \hat{A}_{p+q}, \end{array}$$

wobei die rechte Abbildung von α induziert sei.

Lemma 46. Sei φ ein Morphismus in $\text{Spek}(k)$ und seien alle $\varphi_{p,q}^\infty$ Isomorphismen von R -Moduln. Weiterhin konvergiere φ gegen $\alpha \in \text{Mor}_{\text{Filt}}((A, F), (\hat{A}, \hat{F}))$. Es gebe $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, so dass $F_{s(j)} A_j = \{0\}$ und $\hat{F}_{s(j)} \hat{A}_j = \{0\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Dann ist α ein Isomorphismus.

Beweis. Nach Definition von Konvergenz sind die von α induzierten Abbildungen $\beta_{p,q}^1 : F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \rightarrow \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-1} \hat{A}_{p+q}$ Isomorphismen von R -Moduln. Wir zeigen nun induktiv, dass die von α induzierten $\beta_{p,q}^t : F_p A_{p+q} / F_{p-t} A_{p+q} \rightarrow \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-t} \hat{A}_{p+q}$ für $t \in \mathbb{N}$ Isomorphismen sind: Wir haben folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{p-1} A_{p+q} / F_{p-1-t} A_{p+q} & \longrightarrow & F_p A_{p+q} / F_{p-(t+1)} A_{p+q} & \longrightarrow & F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_{p-1,q+1}^t & & \downarrow \beta_{p,q}^{t+1} & & \downarrow \beta_{p,q}^1 \\ 0 & \longrightarrow & \hat{F}_{p-1} \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-1-t} \hat{A}_{p+q} & \longrightarrow & \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-(t+1)} \hat{A}_{p+q} & \longrightarrow & \hat{F}_p \hat{A}_{p+q} / \hat{F}_{p-1} \hat{A}_{p+q} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sind $\beta_{p-1,q+1}^t$ und $\beta_{p,q}^1$ Isomorphismen, so ist auch $\beta_{p,q}^{t+1}$ ein Isomorphismus. Somit sind alle $\beta_{p,q}^t$ Isomorphismen. Insbesondere sind auch die $\beta_{p,q}^t : F_p A_{p+q} \rightarrow \hat{F}_p \hat{A}_{p+q}$ für $t = \max(1, p - s(p+q))$ Isomorphismen. Damit ist α ein Isomorphismus. \square

Satz 47. Sei $\alpha \in \text{Mor}_{\text{FKK}(k)}((A, F, d), (\hat{A}, \hat{F}, \hat{d}))$ gegeben und sei weiterhin $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben, so dass $F_{s(j)} A_j = \{0\}$ und $\hat{F}_{s(j)} \hat{A}_j = \{0\}$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Dann konvergiert $\mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{L}(k)(\alpha)$ gegen den Morphismus $H(\alpha)$, der von α in Homologie induziert wird. Dabei erhalten wir eine Filtrierung G auf Homologie wie folgt: Sei $p_j : \ker d_j \rightarrow H_j(A, d)$ die kanonische Projektion, dann sei $G_i H_j(A, d) := p_j(F_i A_j \cap \ker d_j)$.

Beweis. Es gilt $K_{p,q}^r = F_p A_{p+q} \cap \ker d_{p+q}$ für $r \geq p - s(p+q+k)$. Definiere $K_{p,q}^\infty := \bigcap_{r \in \mathbb{Z}} K_{p,q}^r = F_p A_{p+q} \cap \ker d_{p+q}$. Es gilt $Z_{p,q}^\infty = \eta_{p,p+q}(K_{p,q}^\infty)$. Weiterhin gilt $\bigcup_{r \in \mathbb{Z}} d_{p+q-k}(K_{p+r-1,q-r-k+1}^{r-1}) = F_p A_{p+q} \cap \text{im}(d_{p+q-k})$ und damit $B_{p,q}^\infty = \eta_{p,p+q}(F_p A_{p+q} \cap \text{im}(d_{p+q-k}))$. Außerdem ist $K_{p-1,q+1}^\infty = K_{p,q}^\infty \cap \ker \eta_{p,p+q}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} G_p H_{p+q}(A, d) / G_{p-1} H_{p+q}(A, d) &\cong \frac{K_{p,q}^\infty}{K_{p-1,q+1}^\infty + (F_p A_{p+q} \cap \text{im}(d_{p+q-k}))} \\ &\cong \frac{\eta_{p,p+q}(K_{p,q}^\infty)}{\eta_{p,p+q}(F_p A_{p+q} \cap \text{im}(d_{p+q-k}))} = Z_{p,q}^\infty / B_{p,q}^\infty = E_{p,q}^\infty. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man Isomorphismen $\hat{G}_p H_{p+q}(\hat{A}, \hat{d}) / \hat{G}_{p-1} H_{p+q}(\hat{A}, \hat{d}) \cong \hat{E}_{p,q}^\infty$. Man prüft leicht nach, dass die von $\mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{L}(k)(\alpha)$ induzierte Abbildung $E_{p,q}^\infty \rightarrow \hat{E}_{p,q}^\infty$ unter den gegebenen Isomorphismen mit der von $H_{p+q}(\alpha)$ induzierten Abbildung übereinstimmt. \square

Bemerkung 48. Wir erhalten weitere Kategorien $\text{Spek}_l(k)$ für $l \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$, deren Objekte gleich den Objekten von $\text{Spek}(k)$ sind. Ein Morphismus $\varphi : (E, d, f) \rightarrow (\hat{E}, \hat{d}, \hat{f})$ besteht aus R -Modul-Homomorphismen $\varphi_{p,q}^r : E_{p,q}^r \rightarrow \hat{E}_{p,q}^r$ für $p, q \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_{\geq l}$, die 1. und 2. aus Definition 38 erfüllen. φ induziert R -Modul-Homomorphismen $\varphi_{p,q}^\infty : E_{p,q}^\infty \rightarrow \hat{E}_{p,q}^\infty$, wie der Beweis von Lemma 39 zeigt. Ist $\varphi_{p,q}^{r_0}$ ein Isomorphismus für ein $r_0 \geq l$ und für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, so sind die $\varphi_{p,q}^\infty$ Isomorphismen. Man kann analog zu Definition 45 Konvergenz definieren und auch die Analogie zu Lemma 46 gilt. Einen Isomorphismus in $\text{Spek}_l(k)$ nennen wir Isomorphismus ab dem E^l -Term.

Definition 49. Sei die Kategorie $\text{P}(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$ wie folgt definiert: Ein Objekt besteht aus R -Moduln $X = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} X_{i,j}$. Zusätzlich haben wir Homomorphismen

$d_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow X_{i+1,j+k}$ mit $d_{i+1,j+k} \circ d_{i,j} = 0$. Ein Morphismus $\gamma : (X, d) \rightarrow (\hat{X}, \hat{d})$ besteht aus Homomorphismen $\gamma_{i,j} : X_{i,j} \rightarrow \hat{X}_{i,j}$ mit $\hat{d}_{i,j} \circ \gamma_{i,j} = \gamma_{i+1,j+k} \circ d_{i,j}$.

Definition 50. Die Kategorie $Q(k)$ für $k \in \mathbb{Z}$ sei wie folgt definiert: Ein Objekt besteht aus R -Moduln $X = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}} X_{i,j}$. Zusätzlich haben wir einen Homomorphismus $d : X \rightarrow X$ mit $d \circ d = 0$. Wir verlangen $d(X_{i,j}) \subset \bigoplus_{l>j} X_{l,j+k}$. Ein Morphismus $(X, d) \rightarrow (\hat{X}, \hat{d})$ ist ein Homomorphismus $\gamma : X \rightarrow \hat{X}$ mit $\hat{d} \circ \gamma = \gamma \circ d$. Wir verlangen $\gamma(X_{i,j}) \subset \bigoplus_{l \geq i} \hat{X}_{l,j}$.

Wir erhalten einen Funktor $\mathfrak{M}(k) : Q(k) \rightarrow P(k)$ wie folgt: Sei $(X, d) \in \text{Ob}(Q(k))$. Sei $\text{pr}_{i,j} : X \rightarrow X_{i,j}$ die kanonische Projektion. Definiere $e_{i,j} := \text{pr}_{i+1,j+k} \circ d|_{X_{i,j}} : X_{i,j} \rightarrow X_{i+1,j+k}$. Dann gilt

$$e_{i+1,j+k} \circ e_{i,j} = \text{pr}_{i+2,j+2+k} \circ d|_{X_{i+1,j+k}} \circ \text{pr}_{i+1,j+k} \circ d|_{X_{i,j}} = \text{pr}_{i+2,j+2+k} \circ d \circ d|_{X_{i,j}} = 0.$$

Es sei $\mathfrak{M}(k)(X, d) := (X, e) \in \text{Ob}(P(k))$. Sei nun $\gamma \in \text{Mor}_{Q(k)}((X, d), (\hat{X}, \hat{d}))$. Definiere $\delta_{i,j} := \hat{\text{pr}}_{i,j} \circ \gamma|_{X_{i,j}} : X_{i,j} \rightarrow \hat{X}_{i,j}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \hat{e}_{i,j} \circ \delta_{i,j} &= \hat{\text{pr}}_{i+1,j+k} \circ \hat{d}|_{\hat{X}_{i,j}} \circ \hat{\text{pr}}_{i,j} \circ \gamma|_{X_{i,j}} = \hat{\text{pr}}_{i+1,j+k} \circ \hat{d} \circ \gamma|_{X_{i,j}} = \hat{\text{pr}}_{i+1,j+k} \circ \gamma \circ d|_{X_{i,j}} \\ &= \hat{\text{pr}}_{i+1,j+k} \circ \gamma|_{X_{i+1,j+k}} \circ \text{pr}_{i+1,j+k} \circ d|_{X_{i,j}} = \delta_{i+1,j+k} \circ e_{i,j}. \end{aligned}$$

Es sei $\mathfrak{M}(k)(\gamma) := \delta \in \text{Mor}_{P(k)}((X, e), (\hat{X}, \hat{e}))$. Man sieht leicht, dass $\mathfrak{M}(k)$ ein Funktor ist.

Einen weiteren Funktor $\mathfrak{N}(k) : Q(k) \rightarrow \text{FKK}(k)$ erhalten wir wie folgt: Sei $(X, d) \in \text{Ob}(Q(k))$. Definiere $F_i A_j := \bigoplus_{l \geq -i} X_{l,j}$. Es gilt $A_j = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F_i A_j = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} X_{l,j}$ und $A = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} A_j = X$. Die Abbildung $d : A \rightarrow A$ erfüllt $d \circ d = 0$ und $d(F_i A_j) \subset F_{i-1} A_{j+k}$. Es sei $\mathfrak{N}(k)(X, d) := (A, F, d) \in \text{Ob}(\text{FKK}(k))$. Sei nun $\gamma \in \text{Mor}_{Q(k)}((X, d), (\hat{X}, \hat{d}))$. Es gilt $\gamma(F_i A_j) \subset \gamma \hat{F}_i \hat{A}_j$ und $\hat{d} \circ \gamma = \gamma \circ d$. Es sei $\mathfrak{N}(k)(\gamma) := \gamma \in \text{Mor}_{\text{FKK}(k)}((A, F, d), (\hat{A}, \hat{F}, \hat{d}))$. Offensichtlich ist $\mathfrak{N}(k)$ ein Funktor.

Definition 51. Sei $\chi : \text{BG-}R\text{-Mod} \rightarrow \text{BG-}R\text{-Mod}$ der Funktor, der der Familie $(A_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ die Familie $(A_{-i,i+j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ zuordnet.

Definition 52. Sei $\mathfrak{S}(k) : P(k) \rightarrow \text{BG-}R\text{-Mod}$ der Homologiefunktor.

Satz 53. Die beiden Funktoren $\chi \circ \mathfrak{S}(k) \circ \mathfrak{M}(k)$ und $\mathfrak{Z}^2(k) \circ \mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{U}(k) \circ \mathfrak{N}(k)$ sind natürlich isomorph.

Beweis. Sei $(X, d) \in \text{Ob}(Q(k))$ und sei $(X, e) := \mathfrak{M}(k)(X, d)$ und $(A, F, d) := \mathfrak{N}(k)(X, d)$. Weiterhin sei $(B, Z, g) := \mathfrak{U}(k)(A, F, d)$. Es gilt

$$Z_{p,q}^2 / B_{p,q}^2 = \frac{\{[a] \in F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \mid d_{p+q}(a) \in F_{p-2} A_{p+q+k}\}}{\{[a] \in F_p A_{p+q} / F_{p-1} A_{p+q} \mid a \in d_{p+q-k}(F_{p+1} A_{p+q-k})\}} \cong \frac{\{x \in X_{-p,p+q} \mid d(x) \in \bigoplus_{l \geq -p+2} X_{l,p+q+k}\}}{\{x \in X_{-p,p+q} \mid x \in \text{pr}_{-p,p+q} \circ d(X_{-p-1,p+q-k})\}}$$

und

$$(\mathfrak{S}(k)(X, e))_{p,q} = \frac{\{x \in X_{p,q} \mid e_{p,q}(x) = 0\}}{\{x \in X_{p,q} \mid x \in e_{p-1,q-k}(X_{p-1,q-k})\}} = \frac{\{x \in X_{p,q} \mid \text{pr}_{p+1,q+k} \circ d(x) = 0\}}{\{x \in X_{p,q} \mid x \in \text{pr}_{p,q} \circ d(X_{p-1,q-k})\}}.$$

Wir erhalten also Isomorphismen $(\mathfrak{S}(k)(X, e))_{-p,p+q} \cong Z_{p,q}^2 / B_{p,q}^2$. Ist $\gamma \in \text{Mor}_{Q(k)}((X, d), (\hat{X}, \hat{d}))$, so sieht man leicht, dass $\chi \circ \mathfrak{S}(k) \circ \mathfrak{M}(k)(\gamma)$ und $\mathfrak{Z}^2(k) \circ \mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{U}(k) \circ \mathfrak{N}(k)(\gamma)$ unter den gegebenen Isomorphismen übereinstimmen. \square

Definition 54. Sei P -Quasi-Isomorphie \sim_P die Äquivalenzrelation auf $\text{Ob}(Q(k))$, die von Folgendem erzeugt wird: $(X, d) \sim_P (\hat{X}, \hat{d})$, falls es $\gamma \in \text{Mor}_{Q(k)}((X, d), (\hat{X}, \hat{d}))$ und $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gibt, so dass $\mathfrak{H}(k) \circ \mathfrak{M}(k)(\gamma)$ ein Isomorphismus ist und für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\bigoplus_{l \geq -s(j)} X_{l,j} = 0 \bigoplus_{l \geq -s(j)} \hat{X}_{l,j}$ gilt.

Korollar 55. Seien $(X, d) \sim_P (\hat{X}, \hat{d})$. Dann sind $\mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{L}(k) \circ \mathfrak{M}(k)(X, d)$ und $\mathfrak{G}(k) \circ \mathfrak{L}(k) \circ \mathfrak{M}(k)(\hat{X}, \hat{d})$ isomorph ab dem E^2 -Term. Weiterhin sind die Homologiegruppen $H(\mathfrak{M}(k)(X, d))$ und $H(\mathfrak{M}(k)(\hat{X}, \hat{d}))$ isomorph als filtrierte graduierte R -Moduln.

Beweis. Satz 53, Satz 47, Lemma 46 □

Lemma 56. Sei $R = \mathbb{Z}$ und sei A abelsche Gruppe. Dann folgt aus $(X, d) \sim_P (\hat{X}, \hat{d})$, dass $(X, d) \otimes_{\mathbb{Z}} A \sim_P (\hat{X}, \hat{d}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Beweis. Universelles Koeffizienten-Theorem □

6 Eine Spektralsequenz in ungerader Khovanov-Homologie

Definition 57. Für $n \leq k \in \mathbb{N}_0$ sei ein Kantenzug der Länge n ein n -Tupel $\theta = ({}_1\theta, \dots, {}_n\theta) \in (\sum(k, 1))^n$, so dass ${}_i\theta^1 = {}_{i+1}\theta^0$ für $i = 1, \dots, n-1$. Wir sagen, θ führt von ${}_1\theta^0$ nach ${}_n\theta^1$.

Definition 58. Für eine Kantenzuordnung s und einen Kantenzug θ der Länge n sei $s(\theta) := \prod_{i=1}^n s({}_i\theta)$.

Definition 59. Für eine (orientierte) k -dimensionale Konfiguration C und $\varepsilon \in \sum(k, 0)$ sei $\text{sp}(C, \varepsilon) := \frac{|G(C, \varepsilon)| - |C| + |\varepsilon|}{2}$.

Lemma 60. Sei C eine (orientierte) k -dimensionale Konfiguration, $\varepsilon \in \sum(k, 0)$ und θ ein Kantenzug von $(0, \dots, 0)$ nach ε . Dann gilt $\text{sp}(C, \varepsilon) = \sum_{i \in \{1, \dots, |\varepsilon|\}} \text{sp}(C, {}_i\theta)$ und $G(C, {}_i\theta)$ ist Spalt 1.

Beweis. Induktion über $|\varepsilon|$. □

Definition 61. Sei C eine (orientierte) k -dimensionale Konfiguration und θ ein Kantenzug der Länge n , dann sei $\text{sp}(C, \theta) := \prod_{i=1}^{n-1} (-1)^{\text{sp}(C, {}_i\theta^1)} = (-1)^{\sum_{i=1}^{n-1} \text{sp}(C, {}_i\theta^1)}$.

Mit Lemma 60 sieht man

$$\sum_{i=1}^{n-1} \text{sp}(C, {}_i\theta^1) \equiv \sum_{i \in \{1, \dots, n-1\}, i \text{ ist ungerade und } G(C, {}_{n-i}\theta) \text{ ist Spalt}} 1 + (n+1) \text{sp}(C, {}_1\theta^0) \pmod{2}.$$

Sei C eine (orientierte) k -dimensionale Konfiguration. Dann erhalten wir zueinander inverse Bijektionen der Menge der Ordnungen der Bögen von C und der Menge der Kantenzüge der Länge k wie folgt. Wir benutzen dabei, dass durch C bereits eine feste Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ der Bögen vorgegeben ist. Dann entsprechen die Ordnungen der Bögen den Permutationen der Menge $\{1, \dots, k\}$. Für $\sigma \in S_n$ erhalten wir nämlich die Ordnung $\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(k)}$. Wir ordnen σ nun einen Kantenzug $\psi(\sigma) = ({}_1\psi(\sigma), \dots, {}_k\psi(\sigma))$ zu. Für $i, j \in \{1, \dots, k\}$ sei

$${}_i\psi(\sigma)_j := \begin{cases} * & \text{falls } \sigma(i) = j, \\ 1 & \text{falls } \sigma^{-1}(j) < i, \\ 0 & \text{falls } \sigma^{-1}(j) > i. \end{cases}$$

Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 1)$ sei $\bar{\varepsilon} \in \{1, \dots, k\}$ die Stelle an der $*$ in ε steht. Wir ordnen dem Kantenzug $\theta = ({}_1\theta, \dots, {}_k\theta)$ dann $\phi(\theta) \in S_n$ mit $\phi(\theta)(i) := {}_{i\bar{\theta}}$ zu. Die Abbildungen ψ und ϕ sind invers zueinander.

Definition 62. Für einen Bogen γ in einer orientierten Konfiguration bezeichnen wir mit γ^0 und γ^1 den Anfangs- und Endpunkt von γ .

Definition 63. Wir nennen eine aktive orientierte Konfiguration C vom Typ

- A_k für $k \in \mathbb{N}$, falls C genau zwei Kreise x_1 und x_2 und genau k Bögen hat, wobei alle Bögen von x_1 nach x_2 zeigen.
- B_k für $k \in \mathbb{N}$, falls C genau k Kreise x_0, \dots, x_{k-1} und genau k Bögen $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ hat, wobei γ_i von $x_{(i-1) \bmod k}$ nach x_i zeigt.
- $C_{p,q}$ für $p \leq q \in \mathbb{N}$, falls C genau einen Kreis x hat und man auf x eine Orientierung als Uhrzeigersinn wählen kann, wodurch man auch Inneres und Äußeres von x festlegt, so dass Folgendes gilt. C hat genau p Bögen $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ im Innern von x und genau q Bögen $\delta_1, \dots, \delta_q$ im Äußeren von x . Wenn man bei γ_1^0 beginnt und x im Uhrzeigersinn entlang läuft, erreicht man die Anfangs- und Endpunkte der Bögen in der Reihenfolge $\gamma_1^0, \dots, \gamma_p^0, \delta_1^0, \dots, \delta_q^0, \gamma_1^1, \dots, \gamma_p^1, \delta_1^1, \dots, \delta_q^1$.
- $D_{p,q}$ für $p \leq q \in \mathbb{N}$, falls Folgendes gilt. Es gibt genau einen Kreis z von C , auf dem zwei Anfangs- und zwei Endpunkte von Bögen liegen. Man kann auf z eine Orientierung als Uhrzeigersinn wählen, so dass innerhalb von z die Kreise x_1, \dots, x_{p-1} und außerhalb von z die Kreise y_1, \dots, y_{q-1} liegen. Die Bögen von C seien $\gamma_1, \dots, \gamma_p, \delta_1, \dots, \delta_q$ und γ_i zeige von x_{i-1} nach x_i für $i = 2, \dots, p-1$, γ_1 zeige von z nach x_1 , γ_p zeige von x_{p-1} nach z . δ_i zeige von y_{i-1} nach y_i für $i = 2, \dots, q-1$, δ_1 zeige von z nach y_1 , δ_q zeige von y_{q-1} nach z . Wenn man z ab γ_1^0 entlang läuft erreicht man im Uhrzeigersinn $\gamma_1^0, \delta_1^0, \gamma_p^1, \delta_q^1$.
- $F_{p,q}$ für $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p + q \geq 1$, falls Folgendes gilt. Es gibt genau einen Kreis y von C , so dass alle Bögen, die auf y starten, auch auf y enden. Diese Bögen seien $\delta_1, \dots, \delta_q$. Wählt man auf y eine Orientierung als Uhrzeigersinn, so gilt für alle δ_i : Liegt δ_i im Innern von y , so gilt: Läuft man y ab δ_i^0 im Uhrzeigersinn entlang, so ist der erste Start- oder Endpunkt eines Bogens, den man erreicht, δ_i^1 . Liegt δ_i im Äußeren von y , so gilt das gleiche, wobei im Uhrzeigersinn durch gegen den Uhrzeigersinn ersetzt sei. Außer y habe C noch die Kreise x_1, \dots, x_p und außer den δ_i noch die Bögen $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, wobei γ_i von x_i nach y zeige.
- $G_{p,q}$ für $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p + q \geq 1$, falls $r(C)$ vom Typ $F_{p,q}$ ist.

Beispiele für die Typen sind in Abbildung 19 dargestellt. Sei

$$T := \{A_k, B_k, C_{p,q}, D_{p,q}, F_{r,s}, G_{r,s} \mid k, p, q \in \mathbb{N}, p \leq q, r, s \in \mathbb{N}_0, r + s \geq 1\}.$$

Ist C nicht zusammenhängend, so gibt es kein $\tau \in T$, so dass C vom Typ τ ist. Ist C mindestens dreidimensional, so gibt es höchstens ein $\tau \in T$, so dass C vom Typ τ ist.

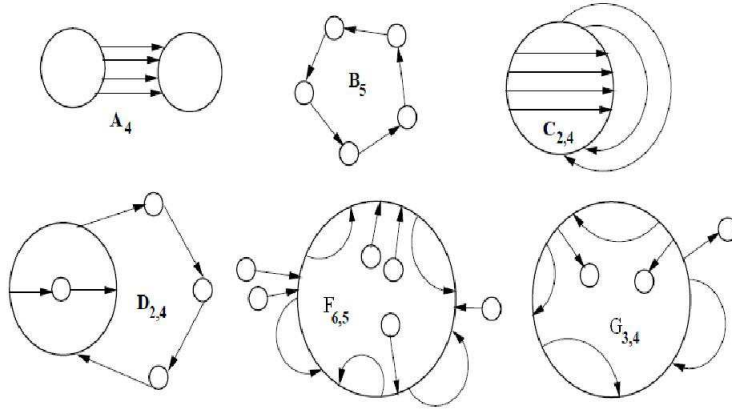


Abbildung 19: Beispiele für die Typen (Abbildung aus [4])

Ist C zweidimensional, so gibt es die Fälle aus den Abbildungen 3 und 4. Fall 28 ist vom Typ A_2 , Fall 29 ist vom Typ B_2 , Fall 45 ist vom Typ $C_{1,1}$ und vom Typ $D_{1,1}$. 17 und 20 sind vom Typ $F_{2,0}$, 18 und 21 sind vom Typ $G_{2,0}$, 32 und 37 sind vom Typ $F_{1,1}$, 31 und 34 sind vom Typ $G_{1,1}$, 39 und 43 sind vom Typ $F_{0,2}$, 40 und 41 sind vom Typ $G_{0,2}$. Alle anderen Fälle sind vom keinem Typ aus T .

Ist C eindimensional, so gibt es zwei Möglichkeiten. Ist C Fusion, so ist es vom Typ A_1 , $F_{1,0}$ und $G_{1,0}$. Ist C Spaltung, so ist es vom Typ B_1 , $F_{0,1}$ und $G_{0,1}$.

Für jedes $\tau \in T$ gibt es ein C vom Typ τ . Für $\tau = A_k$, B_k , $C_{p,q}$, $D_{p,q}$ gibt es genau ein C (bis auf die Ordnungen auf den Bögen und Kanten) vom Typ τ .

C ist genau dann vom Typ A_k , $C_{p,q}$, $F_{p,q}$, wenn $m(C^*)$ vom Typ B_k , $D_{p,q}$, $G_{q,p}$ ist. Definiere für $\tau \in T$ also

$$m(\tau^*) := \begin{cases} B_k & \text{für } \tau = A_k, \\ A_k & \text{für } \tau = B_k, \\ D_{p,q} & \text{für } \tau = C_{p,q}, \\ C_{p,q} & \text{für } \tau = D_{p,q}, \\ G_{q,p} & \text{für } \tau = F_{p,q}, \\ F_{q,p} & \text{für } \tau = G_{p,q}. \end{cases}$$

Eine orientierte Konfiguration sei vom Typ $\tau \in T$, falls ihr aktiver Teil vom Typ τ ist.

Sei C eine aktive orientierte k -dimensionale Konfiguration vom Typ $\tau \in T$ und s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Dann möchten wir den \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus $d_{C,\tau,s} : \Lambda V(C) \rightarrow \Lambda V(C^*)$ definieren. Auf $\Lambda V(C)$ gibt es, bis auf Vorzeichen, eine kanonische Basis. Genau eines dieser Basiselemente soll nicht trivial abgebildet werden. Wir werden im Folgenden beschreiben, welches Element das ist und wie es abgebildet wird. Dazu wählen wir einen zulässigen Kantenzug θ . Für $\tau \neq D_{p,q}$ ist jeder Kantenzug der Länge k (mit Kanten in $\Sigma(k, 1)$) zulässig, für $\tau = D_{p,q}$ werden wir später beschreiben, welche Kantenzüge der Länge k zulässig sind. Dann definieren wir $x_{C,\tau,\theta} \in \Lambda V(C)$ und

$y_{C,\tau} \in \Lambda V(C^*)$. Es sei

$$d_{C,\tau,s}(x_{C,\tau,\theta}) = s(\theta)\text{sp}(C, \theta)y_{C,\tau}.$$

Wir werden zeigen, dass dies unabhängig von der Wahl von θ ist.

Sei $\tau = A_k$. Dann seien

$$\begin{aligned} x_{C,A_k,\theta} &= 1, \\ y_{C,A_k} &= (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $d_{C,\tau,s}$ unabhängig von θ ist. Sei also η ein weiterer Kantenzug der Länge k . Wir müssen nur den Fall $\phi(\eta) = \phi(\theta) \circ (i \ i+1)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ betrachten, da die S_n von solchen Transpositionen erzeugt wird. In diesem Fall unterscheiden sich $({}_1\eta, \dots, {}_k\eta)$ und $({}_1\theta, \dots, {}_k\theta)$ nur in der i -ten und $(i+1)$ -ten Kante. Sei

$$\varepsilon_j := \begin{cases} * & \text{für } j = i\bar{\theta} = {}_{i+1}\bar{\eta} \text{ oder } j = {}_{i+1}\bar{\theta} = i\bar{\eta}, \\ i\eta_j = {}_{i+1}\eta_j = i\theta_j = {}_{i+1}\theta_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $s(\theta)s(\eta) = 1$, falls $G(C, \varepsilon)$ vom Typ A oder Y ist und $s(\theta)s(\eta) = -1$, falls $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K oder X ist, da s eine Kantenzuordnung vom Typ Y ist. Weil C vom Typ A_k ist, ist $G(C, \varepsilon)$ Fall 22, 28 oder 38 aus den Abbildungen 3 und 4. Es folgt $s(\theta) = s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$.

Sei $\tau = B_k$. Wir haben durch C eine Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ der Bögen gegeben. Die Kreise von C seien so mit x_1, \dots, x_k bezeichnet, dass γ_i^1 auf x_i liegt. C^* ist vom Typ A_k , die Kreise von C^* seien so mit y_1, y_2 bezeichnet, dass alle Bögen von y_1 nach y_2 zeigen. Weiterhin sei θ ein Kantenzug der Länge k . Dann seien

$$\begin{aligned} x_{C,B_k,\theta} &= x_{\phi(\theta)(1)} \wedge \dots \wedge x_{\phi(\theta)(k)}, \\ y_{C,B_k} &= y_1 \wedge y_2. \end{aligned}$$

Verhalte sich η zu θ wie für $\tau = A_k$ beschrieben und sei ε auf die gleiche Weise definiert. Es gilt $x_{C,B_k,\theta} = -x_{C,B_k,\eta}$. $G(C, \varepsilon)$ ist Fall 1, 16 oder 29 aus den Abbildungen 3 und 4. Es folgt $s(\theta) = -s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$.

Sei $\tau = C_{p,q}$. Dann seien

$$\begin{aligned} x_{C,C_{p,q},\theta} &= 1, \\ y_{C,C_{p,q}} &= (-1)^k. \end{aligned}$$

Seien η und ε wie beschrieben. $G(C, \varepsilon)$ ist Fall 7, 22, 23, 24, 28, 31, 32, 38, 41, 42, 43 oder 45. In den Fällen 7, 31, 32 ist $s(\theta) = -s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = -\text{sp}(C, \eta)$. In den Fällen 22, 23, 24, 28, 38, 41, 42, 43, 45 ist $s(\theta) = s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$.

Sei $\tau = D_{p,q}$ und sei x der Kreis von C , auf dem zwei Anfangs- und zwei Endpunkte von Bögen liegen. Wir haben durch C eine Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ der Bögen gegeben. Seien γ_a, γ_b die beiden Bögen, die auf x zeigen. Für $i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{a, b\}$ sei x_i der Kreis, auf den γ_i zeigt. Der Kreis von C^* sei mit y bezeichnet. Ein Kantenzug der Länge k (mit Kanten in $\Sigma(k, 1)$) sei zulässig, falls $\{\phi(\theta)(k-1), \phi(\theta)(k)\} = \{a, b\}$. Dann sei

$$\begin{aligned} x_{C,D_{p,q},\theta} &= x_{\phi(\theta)(1)} \wedge \dots \wedge x_{\phi(\theta)(k-2)} \wedge x, \\ y_{C,D_{p,q}} &= y. \end{aligned}$$

Sei zunächst η Kantenzug der Länge k , so dass $\phi(\eta) = \phi(\theta) \circ (k-1\ k)$. Sei ε wie beschrieben. Dann ist $G(C, \varepsilon)$ Fall 45. Es folgt $s(\theta) = s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$. Sei nun η Kantenzug der Länge k , so dass $\phi(\eta) = \phi(\theta) \circ (i\ i+1)$ für $i \in \{1, \dots, k-3\}$. Dann ist $x_{C, D_{p,q}, \theta} = -x_{C, D_{p,q}, \eta}$. Sei ε wie beschrieben. $G(C, \varepsilon)$ ist Fall 1, 2, 16 oder 21. Es folgt $s(\theta) = -s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$. Sei $\tau = F_{p,q}$. Wir haben durch C eine Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ der Bögen gegeben. Für $i = 1, \dots, k$ sei $x_i := 1 \in \Lambda V(C)$, falls γ_i^0 und γ_i^1 auf dem gleichen Kreis liegen. Andernfalls sei x_i der Kreis, auf dem γ_i^0 liegt. In C^* gibt es genau einen Kreis y , so dass alle Bögen, die auf y enden, auch auf y starten. Dann sei

$$x_{C, F_{p,q}, \theta} = x_{\phi(\theta)(1)} \wedge \dots \wedge x_{\phi(\theta)(k)},$$

$$y_{C, F_{p,q}} = y.$$

Sei η Kantenzug der Länge k , so dass $\phi(\eta) = \phi(\theta) \circ (i\ i+1)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Sei ε wie beschrieben. Betrachte zunächst den Fall, dass $x_{\phi(\theta)(i)} = 1$ oder $x_{\phi(\theta)(i+1)} = 1$. Dann gilt $x_{C, F_{p,q}, \theta} = x_{C, F_{p,q}, \eta}$. $G(C, \varepsilon)$ ist Fall 32, 37, 39 oder 43. In den Fällen 32, 37 ist $s(\theta) = -s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = -\text{sp}(C, \eta)$. In den Fällen 39, 43 ist $s(\theta) = s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$. Betrachte nun den Fall, dass $x_{\phi(\theta)(i)} \neq 1 \neq x_{\phi(\theta)(i+1)}$. Dann gilt $x_{C, F_{p,q}, \theta} = -x_{C, F_{p,q}, \eta}$. $G(C, \varepsilon)$ ist Fall 17 oder 20. Es folgt $s(\theta) = -s(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(C, \eta)$. Sei $\tau = G_{p,q}$. Wir haben durch C eine Ordnung $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ der Bögen gegeben. Für $i = 1, \dots, k$ sei $x_i := 1 \in \Lambda V(C)$, falls γ_i^0 und γ_i^1 auf dem gleichen Kreis liegen. Andernfalls sei x_i der Kreis, auf dem γ_i^1 liegt. In C^* gibt es genau einen Kreis y , so dass alle Bögen, die auf y starten, auch auf y enden. Dann sei

$$x_{C, G_{p,q}, \theta} = x_{\phi(\theta)(1)} \wedge \dots \wedge x_{\phi(\theta)(k)},$$

$$y_{C, G_{p,q}} = (-1)^{p+1} y.$$

Dass $d_{C, G_{p,q}, s}$ unabhängig von θ ist, zeigt man analog zum Fall $\tau = F_{p,q}$. Für $x \in \Lambda^m V(C)$ schreiben wir $\text{gr}(x) = m$. Dann gilt

$$\text{gr}(y_{C, \tau}) - \text{gr}(x_{C, \tau, \theta}) = \frac{|C^*| - |C| - k}{2} + 1 = \text{sp}(C, (1, \dots, 1)) - k + 1. \quad (64)$$

Als Nächstes möchten wir $d_{C, \tau, s}$ auch für den Fall definieren, dass C nicht unbedingt aktiv ist. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ seien z_1, \dots, z_n beliebige passive Kreise von C und $\omega := z_1 \wedge \dots \wedge z_n$. Weiterhin sei θ ein für $\text{akt}(C)$ zulässiger Kantenzug, wir nennen θ dann zulässig für C . Nun sei

$$d_{C, \tau, s}(x_{\text{akt}(C), \tau, \theta} \wedge \omega) = s(\theta) \text{sp}(C, \theta) y_{\text{akt}(C), \tau} \wedge \omega.$$

Alle kanonischen Basiselemente von $\Lambda V(C)$, die sich nicht bis auf ein Vorzeichen in der Form $x_{\text{akt}(C), \tau, \theta} \wedge \omega$, mit einem ω wie beschrieben, darstellen lassen, werden trivial abgebildet.

Es sei

$$d_{C, s} := \sum_{\tau \in T, C \text{ ist vom Typ } \tau} d_{C, \tau, s}.$$

Ist C eindimensional, so ist $d_{C, s}$ gleich dem ungeraden Khovanov-Differential $\partial(C, s) = s(*)\partial_C$.

Eine Kantenzuordnung $s : \Sigma(k, 1) \rightarrow \{-1, 1\}$ induziert für $\varepsilon \in \Sigma(k, n)$, $1 \leq n \leq k$,

eine Kantenzuordnung $s|_\varepsilon : \Sigma(n, 1) \rightarrow \{-1, 1\}$ wie folgt. Seien $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ so, dass $\varepsilon_{i_j} = *$ für $j = 1, \dots, n$. Für $\lambda \in \Sigma(n, 1)$ sei $\mu \in \Sigma(k, 1)$ mit $\mu_l := \varepsilon_l$ falls $\varepsilon_l \neq *$ und $\mu_{i_j} := \lambda_j$ für $j = 1, \dots, n$. Dann sei $s|_\varepsilon(\lambda) := s(\mu)$. Sei C eine k -dimensionale orientierte Konfiguration, s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C und $1 \leq n \leq k$. Wir erhalten für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, n)$ die Abbildung

$$d_{G(C, \varepsilon), s|_\varepsilon} : \underbrace{\Lambda V(G(C, \varepsilon))}_{=V(G(C, \varepsilon^0))} \rightarrow \underbrace{\Lambda V((G(C, \varepsilon))^*)}_{=V(G(C, \varepsilon^1))}.$$

Es sei

$$d_n(C, s) := \bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k, n)} (-1)^{|\varepsilon^0| + (n+1)\text{sp}(C, \varepsilon^0)} d_{G(C, \varepsilon), s|_\varepsilon} : \Gamma(C) \rightarrow \Gamma(C)$$

und $d(C, s) := \sum_{1 \leq n \leq k} d_n(C, s)$. Dann erhöht $d_n(C, s)$ den h -Grad um n und senkt den δ -Grad um 2.

Satz 65. Es gilt $d(C, s) \circ d(C, s) = 0$.

Diesen Satz werden wir später beweisen. Wir erhalten also

$$\Omega(C, s) := (\Gamma(C), d(C, s)) \in \text{Ob}(\mathcal{Q}(-2)).$$

Es gilt $\mathfrak{M}(-2)(\Omega(C, s)) \cong \Gamma(C, s) = (\Gamma(C), \partial(C, s))$. Weiterhin ist $\Omega(C, s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph zu dem von Szabo konstruierten Komplex ([4]).

Satz 66. Seien C und D orientierte Konfigurationen, so dass $\overline{C} = \overline{D}$. Seien s und t Kantenzuordnungen, so dass s bezüglich C und t bezüglich D den Typ Y hat. Dann sind $\Omega(C, s)$ und $\Omega(D, t)$ isomorph.

Diesen Satz werden wir später beweisen. Sei D nun ein Verschlingungsdiagramm und C eine orientierte Konfiguration, so dass \overline{C} eine Nullglättung von D ist. Weiterhin sei s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Dann sei $\Omega(D, C, s) \in \text{Ob}(\mathcal{Q}(-2))$ wie $\Omega(C, s)$ nur die Bigraduierung unterscheide sich, wie bei ungerader Khovanov-Homologie beschrieben.

Satz 67. Seien D_1 und D_2 Verschlingungsdiagramme, die durch endlich viele Reidemeister-Bewegungen auseinander hervorgehen. Dann gibt es orientierte Konfigurationen C_1, C_2 , so dass $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ Nullglättungen von D_1, D_2 sind und Kantenzuordnungen s_1, s_2 vom Typ Y bezüglich C_1, C_2 , so dass $\Omega(D_1, C_1, s_1) \sim_P \Omega(D_2, C_2, s_2)$.

Diesen Satz werden wir später beweisen.

Nach Korollar 55 ordnen wir einer Verschlingung L eine filtrierte graduierte abelsche Gruppe $\hat{H}(L)$ zu (bis auf Isomorphie). Weiterhin ordnen wir L eine Spektralsequenz $\hat{E}(L)$ vom Grad -2 zu (bis auf Isomorphie ab dem E^2 -Term). $\hat{E}^2(L)$ ist die ungerade Khovanov-Homologie von L . Dabei ist die Graduierung mittels χ aus Definition 51 geändert. $\hat{E}(L)$ konvergiert gegen $\hat{H}(L)$.

Lemma 68. Sei L eine Verschlingung, deren ungerade Khovanov-Homologie gleich der des Unknotens ist. Dann ist $\hat{H}(L) = \hat{H}(\text{Unknoten})$.

Beweis. Mittels $\hat{E}(L)$. □

Die Verschlingungen, die durch \hat{L} vom Unknoten unterschieden werden können, können also auch durch ungerade Khovanov-Homologie vom Unknoten unterschieden werden.

Sei C eine orientierte Konfiguration und s eine Kantenzuordnung vom Typ X bezüglich C . Dann ist s vom Typ Y bezüglich $r(m(C))$. Es sei $\Omega'(C, s) := \Omega(r(m(C)), s)$. Damit ist $\mathfrak{M}(-2)(\Omega'(C, s)) \cong \Gamma(C, s)$ und $\Omega'(C, s) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist isomorph zu dem von Szabo beschriebenen Komplex mit Randabbildung d' ([4], Anfang von Kapitel 8).

Analog zum Beweis von Korollar 17 kann man aus Satz 67 folgern, dass $\Omega(C, s) \sim_{\mathbb{P}} \Omega'(C, t)$ für eine orientierte Konfiguration C und Kantenzuordnungen s, t , so dass s Typ Y und t Typ X bezüglich C hat. Somit sind die von Szabo beschriebenen $\hat{H}'(L)$ und $\hat{H}(L)$ ([4], Anfang von Kapitel 8), sowie die beiden zugehörigen Spektralsequenzen ab dem E^2 -Term, isomorph.

7 Abhängigkeit von der Orientierung

Sei C eine orientierte Konfiguration. Wir haben eine Ordnung auf den Kreisen x_1, \dots, x_n gegeben. Für $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ nennen wir $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m} \in \Lambda V(C)$ ein Monom vom Grad m , das durch x_{i_1}, \dots, x_{i_m} teilbar ist. Die Monome bilden eine Basis der freien abelschen Gruppe $\Lambda V(C)$. Wir haben eine Ordnung auf den Kanten e_1, \dots, e_l von C gegeben. Diese induziert auf kanonische Weise eine Ordnung f_1, \dots, f_l der Kanten von C^* . Für $i \in \{1, \dots, l\}$ sei $x_C(i)$ der Kreis von C , in dem e_i liegt. Sei s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C , dann sieht man leicht, dass für $i \in \{1, \dots, l\}$ Folgendes gilt:

Lemma 69 (Filtrierungsregel). *Ist C vom Typ $\tau \in T$ und sind $\alpha \in \Lambda V(C)$, $\beta \in \Lambda V(C^*)$ Monome, so dass α durch $x_C(i)$ teilbar ist und der Koeffizient von $d_{C, \tau, s}(\alpha)$ bei β nicht Null ist, dann ist β durch $x_{C^*}(i)$ teilbar.*

Für ein Monom $\alpha \in \Lambda V(C)$ vom Grad m sei $\alpha^* \in \Lambda V(m(C))$ das eindeutig bestimmte Monom vom Grad $n - m$, so dass α^* genau durch die Kreise von $m(C)$ teilbar ist, durch deren Entsprechung in C das Monom α nicht teilbar ist. Sei t eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich $m(C^*)$. Man prüft leicht nach, dass dann gilt:

Lemma 70 (Dualitätsregel). *Sei C vom Typ $\tau \in T$ und seien $\alpha \in \Lambda V(C)$, $\beta \in \Lambda V(C^*)$ Monome. Dann ist der Koeffizient von $d_{C, \tau, s}(\alpha)$ bei β bis auf ein Vorzeichen gleich dem Koeffizienten von $d_{m(C^*), m(\tau^*), t}(\beta^*)$ bei α^* .*

Die Filtrierungsregel gilt auch für $d_{C, s} = \sum d_{C, \tau, s}$. Die Dualitätsregel gilt auch für $d_{C, s}$ und $d_{m(C^*), t}$.

Für eine aktive orientierte eindimensionale Konfiguration C möchten wir einen \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus $H_C : \Lambda V(C) \rightarrow \Lambda V(C^*)$ definieren. Für den 1. Fall aus Abbildung 2 sei $H_C(1) = H_C(x_1) = H_C(x_2) = 0$ und $H_C(x_1 \wedge x_2) = y$. Für den 2. Fall sei $H_C(1) = 1$ und $H_C(y) = 0$. Ist C nicht unbedingt aktiv, so sei H_C analog zu ∂_C definiert. H_C erfüllt Filtrierungs- und Dualitätsregel.

Sei C nun eine orientierte k -dimensionale Konfiguration und s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Für $i = 1, \dots, k$ sei $H_i(C, s) : \Gamma(C) \rightarrow \Gamma(C)$ definiert als

$$\bigoplus_{\varepsilon \in \Sigma(k, 1) \text{ mit } \varepsilon_i = *} s(\varepsilon) (-1)^{\text{sp}(C, \varepsilon^0)} H_{G(C, \varepsilon)}.$$

Es gilt $H_i(C, s) \circ H_i(C, s) = 0$. Weiterhin erhöht $H_i(C, s)$ den h -Grad um 1 und lässt den δ -Grad unverändert.

Satz 71. Seien C, D orientierte k -dimensionale Konfigurationen, so dass $\overline{C} = \overline{D}$ und die Orientierung der Bögen sich nur beim i -ten Bogen unterscheidet, für $i \in \{1, \dots, k\}$. Dann gibt es für jede Kantenzuordnung s vom Typ Y bezüglich C eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich D , so dass

$$d(C, s) - d(D, t) = d(C, s) \circ H_i(C, s) - H_i(C, s) \circ d(C, s).$$

Beweis. Ohne Einschränkungen sei $i = 1$.

Sei $\kappa : \Sigma(k, 1) \rightarrow \{1, -1\}$ definiert durch

$$\kappa(\varepsilon) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \varepsilon_1 = * \text{ und } G(C, \varepsilon) \text{ eine Spaltung ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Beweis von Lemma 22 zeigt, dass $t := \kappa s$ eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich D ist. Weiterhin ist $d_1(C, s) = d_1(D, t)$. Sei nun $k \geq 2$ und $a = (0, *, \dots, *)$, $b = (1, *, \dots, *) \in \Sigma(k, k-1)$, sowie $c = (*, 0, \dots, 0)$, $d = (*, 1, \dots, 1) \in \Sigma(k, 1)$. Zu zeigen ist:

$$d_{C,s} - d_{D,t} = (-1)^{1+k\text{sp}(C,b^0)} s(c) d_{G(C,b),s|_b} \circ H_{G(C,c)} - (-1)^{\text{sp}(C,d^0)} s(d) H_{G(C,d)} \circ d_{G(C,a),s|_a} \quad (72)$$

Wir müssen nur den Fall betrachten, dass C aktiv ist. Sei C zunächst nicht zusammenhängend. Dann müssen wir nur den Fall betrachten, dass C aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht, wobei in der einen Zusammenhangskomponente der erste Bogen und sonst kein weiterer Bogen liegt. Sei θ ein für $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C, b))$ zulässiger Kantenzug. Sei zunächst $\text{akt}(G(C, c)) = \text{akt}(G(C, d))$ die linke Seite aus Abbildung 2. Dann ist $\text{sp}(C, b^0) = 0$. Weiterhin gilt $s(d)s|_a(\theta) = (-1)^{k-1} s(c)s|_b(\theta)$, weil $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K ist, für alle $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$ mit $\varepsilon_1 = *$. Ist $G(C, a)$ vom Typ $\tau \in T$, so ist

$$\begin{aligned} & d_{G(C,b),\tau,s|_b} \circ H_{G(C,c)}(x_1 \wedge x_2 \wedge x_{G(C,b),\tau,\theta}) \\ &= d_{G(C,b),\tau,s|_b}(y \wedge x_{G(C,b),\tau,\theta}) \\ &= (-1)^{\text{gr}(x_{G(C,b),\tau,\theta})} s|_b(\theta) \text{sp}(G(C, b), \theta) y_{G(C,b),\tau} \wedge y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & H_{G(C,d)} \circ d_{G(C,a),\tau,s|_a}(x_1 \wedge x_2 \wedge x_{G(C,b),\tau,\theta}) \\ &= s|_a(\theta) \text{sp}(G(C, a), \theta) H_{G(C,d)}(y_{G(C,a),\tau} \wedge x_1 \wedge x_2) \\ &= s|_a(\theta) \text{sp}(G(C, b), \theta) y \wedge y_{G(C,b),\tau} \\ &= (-1)^{\text{gr}(y_{G(C,b),\tau})} s|_a(\theta) \text{sp}(G(C, b), \theta) y_{G(C,b),\tau} \wedge y. \end{aligned}$$

Wegen

$$\text{gr}(y_{G(C,b),\tau}) - \text{gr}(x_{G(C,b),\tau,\theta}) = \text{sp}(G(C, b), (1, \dots, 1)) - (k-1) + 1 = \text{sp}(C, d^0) - k + 2$$

ist die rechte Seite von Gleichung (72) trivial.

Sei nun $\text{akt}(G(C, c)) = \text{akt}(G(C, d))$ die rechte Seite aus Abbildung 2. Dann ist $\text{sp}(C, b^0) = 1$. Weiterhin ist $s(d)s|_a(\theta) = (-1)^{k-1-\text{sp}(C,d^0)} s(c)s|_b(\theta)$, weil Folgendes

gilt: Seien $\varepsilon \in \Sigma(k, 2)$, $\eta \in \Sigma(k, 1)$ gleich, bis auf die erste Komponente, es sei nämlich $\varepsilon_1 = *$ und $\eta_1 = 0$. Dann ist $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K, falls $G(C, \eta)$ Fusion ist und vom Typ A, falls $G(C, \eta)$ Spaltung ist. Also ist die rechte Seite von Gleichung (72) trivial.

Sei C nun zusammenhängend. Sei C zuerst Fall 28 aus Abbildung 4, siehe Abbildung 20. Weil C vom Typ A und D vom Typ K ist, gilt

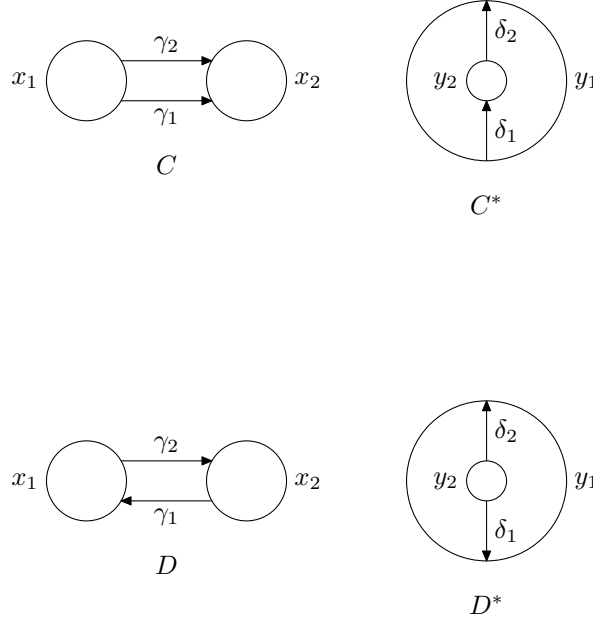


Abbildung 20:

$$s(0, *)s(*, 1) = s(*, 0)s(1, *) = t(*, 0)t(1, *) = -t(0, *)t(*, 1).$$

Weiterhin ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = \text{sp}(C, (0, 1)) = 0$. Es ist $d_{C,s}(1) = -s(0, *)s(*, 1)$ und $d_{D,t}(x_1 \wedge x_2) = t(*, 0)t(1, *)y_2 \wedge y_1$. Weiterhin gilt $d_{G(C,(1,*)),s|(1,*)} \circ H_{G(C,(*,0))}(x_1 \wedge x_2) = s(1,*)y_2 \wedge y_1$ und $H_{G(C,(*,1))} \circ d_{G(C,(0,*)),s|(0,*)}(1) = s(0,*)$. Somit ist Gleichung (72) erfüllt.

Ist C Fall 29 aus Abbildung 4, so sind die Rollen von C und D und damit auch von s und t aus Fall 28 vertauscht und man erhält auf beiden Seiten von Gleichung (72) das Negative aus Fall 28.

Sei C nun Fall 45, siehe Abbildung 21. Weil C vom Typ Y ist, gilt $s(0, *)s(*, 1) = s(*, 0)s(1, *)$. Weiterhin ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = \text{sp}(C, (0, 1)) = 1$. Es ist $d_{C,s}(1) = -s(0, *)s(*, 1)$ und $d_{C,s}(x) = -s(0, *)s(*, 1)y$ und $d_{D,t} = 0$. Weiterhin gilt $d_{G(C,(1,*)),s|(1,*)} \circ H_{G(C,(*,0))}(1) = s(1,*)$ und $H_{G(C,(*,1))} \circ d_{G(C,(0,*)),s|(0,*)}(x) = -s(0,*)y$. Somit ist Gleichung (72) erfüllt. Ist C Fall 44, so sind die Rollen von C und D und damit auch von s und t aus Fall 45 vertauscht und man erhält auf beiden Seiten von Gleichung (72) das Negative aus Fall 45.

Unser C ist eine zusammenhängende, orientierte, mindestens zweidimensionale Konfiguration, es gilt also: C ist einer der Fälle 28,29,44,45 aus Abbildung 4 oder

$$u_C := \#\{\tau \in T \mid C \text{ oder } D \text{ ist vom Typ } \tau\} \leq 1.$$

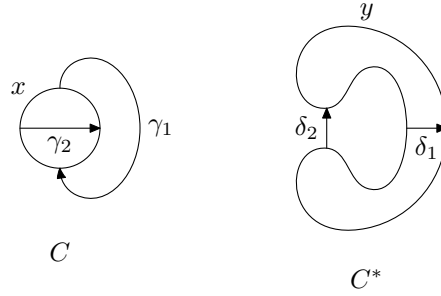


Abbildung 21:

Sei $u_C = 1$. Ohne Einschränkungen gehen wir davon aus, dass es $\tau \in T$ gibt, so dass C vom Typ τ ist.

Sei $\tau = A_k$, $k \geq 3$. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T . Weiterhin ist $G(C, a)$ vom Typ A_{k-1} und $G(C, d)$ ist Spaltung. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Sei $\tau = B_k$, $k \geq 3$. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T . Weiterhin ist $G(C, b)$ vom Typ B_{k-1} und $G(C, c)$ ist Fusion. Es folgt $\text{sp}(C, b^0) = 0$. Wähle eine Ordnung auf den Bögen von C , die mit dem ersten Bogen (aus der gegebenen Ordnung der Bögen) beginnt und bei der der Bogen an zweiter Stelle steht, dessen Endpunkt auf dem Kreis liegt, auf dem der Anfangspunkt des ersten Bogens liegt. Dies liefert zulässige Kantenzüge θ , η für C , $G(C, b)$. Es gilt $s(\theta) = s(c)s_b(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(G(C, b), \eta)$. Außerdem ist $H_{G(C, c)}(x_{C, B_k, \theta}) = -x_{G(C, b), B_{k-1}, \eta}$ und $y_{G(C, b), B_{k-1}} = y_{C, B_k}$. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Sei $\tau = C_{p, q}$, $p + q \geq 3$. Die S^2 ohne den Kreis x von C besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten. Betrachte zuerst den Fall, dass der erste Bogen von C der einzige Bogen in seiner Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus x$ ist. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T . Weiterhin ist $G(C, b)$ vom Typ A_{k-1} und $G(C, c)$ ist Spaltung. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Betrachte nun den Fall, dass in der Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus x$, in der der erste Bogen liegt, noch mindestens ein weiterer Bogen liegt. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T oder $G(C, b)$ ist vom Typ $F_{1,1}$ oder vom Typ $G_{1,1}$. Weil $G(C, c)$ Spaltung ist, ist $d_{G(C, b), s|_b} \circ H_{G(C, c)} = 0$. Weiterhin ist $G(C, a)$ vom Typ $C_{p-1, q}$ oder $C_{p, q-1}$ und $G(C, d)$ ist Spaltung. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

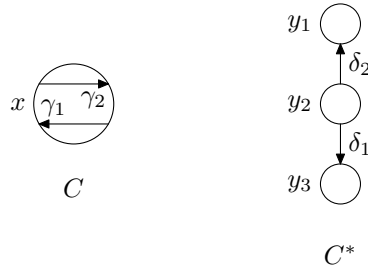
Sei $\tau = D_{p, q}$, $p + q \geq 3$. Sei x der Kreis von C , auf dem zwei Anfangs- und zwei Endpunkte von Bögen liegen. Betrachte zuerst den Fall, dass der erste Bogen von C der einzige Bogen in seiner Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus x$ ist. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T . Weiterhin ist $G(C, a)$ vom Typ B_{k-1} und $G(C, d)$ ist Fusion. Ein zulässiger Kantenzug θ für C , so dass $\phi(\theta)(k)$ der erste Bogen ist, liefert einen zulässigen Kantenzug η für $G(C, a)$. Es gilt $s(\theta) = s|_a(\eta)s(d)$ und $\text{sp}(C, \theta) = (-1)^{\text{sp}(C, d^0)} \text{sp}(G(C, a), \eta)$. Außerdem ist $x_{C, D_{p, q}, \theta} = x_{G(C, a), B_{k-1}, \eta}$ und $H_{G(C, d)}(y_{G(C, a), B_{k-1}}) = -y_{C, D_{p, q}}$. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Betrachte nun den Fall, dass in der Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus x$, in der der erste Bogen liegt, noch mindestens ein weiterer Bogen liegt. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T oder $G(C, a)$ ist vom Typ $F_{1,1}$ oder vom Typ $G_{1,1}$. Weil $G(C, d)$ Fusion ist, ist $H_{G(C, d)} \circ d_{G(C, a), s|_a} = 0$. Weiterhin ist $G(C, b)$ vom Typ $D_{p-1, q}$ oder $D_{p, q-1}$ und $G(C, c)$ ist Fusion. Es folgt $\text{sp}(C, b^0) = 0$. Liege zunächst der Endpunkt des ersten Bogens nicht auf x . Dann sei θ ein zulässiger Kantenzug für C , so dass $\phi(\theta)(1)$ der erste Bogen ist. θ liefert einen zulässigen

Kantenzug η für $G(C, b)$. Es gilt $s(\theta) = s(c)s|_b(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(G(C, b), \eta)$. Außerdem ist $H_{G(C, c)}(x_{C, D_{p, q}, \theta}) = -x_{G(C, b), D_{p-1, q}, \eta}$ und $y_{G(C, b), D_{p-1, q}} = y_{C, D_{p, q}}$, wobei für $D_{p-1, q}$ auch $D_{p, q-1}$ stehen kann. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Liege nun der Endpunkt des ersten Bogens auf x . Dann sei θ ein zulässiger Kantenzug für C , so dass $\phi(\theta)(k-1)$ der erste Bogen ist und $\phi(\theta)(k-2)$ der Bogen ist, dessen Endpunkt auf dem Kreis liegt, auf dem der Anfangspunkt des ersten Bogens liegt. θ liefert einen zulässigen Kantenzug η für $G(C, b)$. Es gilt $s(\theta) = (-1)^{k-2}s(c)s|_b(\eta)$, weil $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K ist, für alle $\varepsilon \in \sum(k, 2)$ mit $|\varepsilon^1| < k$. Weiterhin gilt $\text{sp}(C, \theta) = \text{sp}(G(C, b), \eta)$. Außerdem ist $H_{G(C, c)}(x_{C, D_{p, q}, \theta}) = (-1)^{k-3}x_{G(C, b), D_{p-1, q}, \eta}$ und $y_{G(C, b), D_{p-1, q}} = y_{C, D_{p, q}}$, wobei für $D_{p-1, q}$ auch $D_{p, q-1}$ stehen kann. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

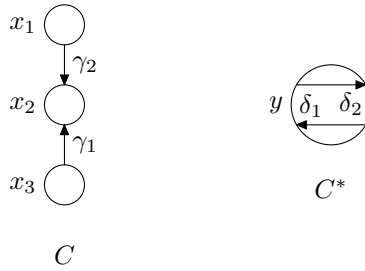
Sei $\tau = F_{0,2}$, siehe Abbildung 22. Weil C vom Typ A ist, gilt $s(0, *)s(*, 1) =$



Abbildungung 22:

$s(*, 0)s(1, *)$. Weiterhin ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = \text{sp}(C, (0, 1)) = 1$. Es ist $d_{C, s}(1) = -s(0, *)s(*, 1)y_2$. Weiterhin gilt $d_{G(C, (1, *)), s|_{(1, *)}} \circ H_{G(C, (*, 0))}(1) = s(1, *) (y_2 - y_1)$ und $H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(1) = -s(0, *)y_1$. Somit ist Gleichung (72) erfüllt.

Sei $\tau = F_{2,0}$, siehe Abbildung 23. Weil C vom Typ K ist, gilt $s(0, *)s(*, 1) =$



Abbildungung 23:

$-s(*, 0)s(1, *)$. Weiterhin ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = \text{sp}(C, (0, 1)) = 0$. Es ist $d_{C, s}(x_1 \wedge x_3) = s(0, *)s(*, 1)y$. Weiterhin gilt $d_{G(C, (1, *)), s|_{(1, *)}} \circ H_{G(C, (*, 0))}(x_3 \wedge x_2) = s(1, *)y$ und $H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(x_1 \wedge x_3) = -s(0, *)y = H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(x_2 \wedge x_3)$. Somit ist Gleichung (72) erfüllt.

Sei $\tau = F_{1,1}$, so dass der Anfangs- und Endpunkt des ersten Bogens von C auf dem gleichen Kreis liegen, siehe Abbildung 24. Weil C vom Typ K ist, gilt $s(0, *)s(*, 1) = -s(*, 0)s(1, *)$. Weiterhin ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = 1$ und $\text{sp}(C, (0, 1)) = 0$. Es ist $d_{C, s}(x_2) = s(0, *)s(*, 1)y_1$. Weiterhin gilt $d_{G(C, (1, *)), s|_{(1, *)}} \circ H_{G(C, (*, 0))}(1) = s(1, *)$ und $d_{G(C, (1, *)), s|_{(1, *)}} \circ H_{G(C, (*, 0))}(x_2) = s(1, *)y_1$ und $H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(1) = s(0, *)$.

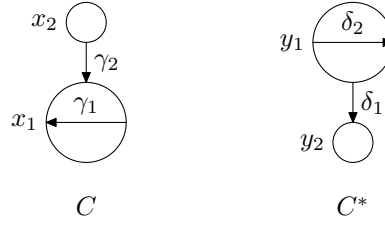


Abbildung 24:

Somit ist Gleichung (72) erfüllt.

Sei nun $\tau = F_{1,1}$, so dass der Anfangs- und Endpunkt des ersten Bogens von C auf unterschiedlichen Kreisen liegen, siehe Abbildung 25. Es ist $\text{sp}(C, (1, 0)) = 0$

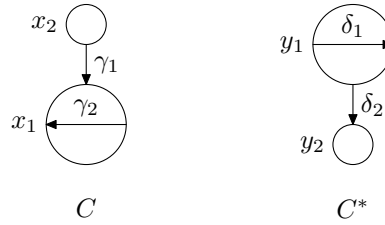


Abbildung 25:

und $\text{sp}(C, (0, 1)) = 1$ und $d_{C,s}(x_2) = s(*, 0)s(1, *)y_1$. Weiterhin gilt $d_{G(C, (1, *)), s|_{(1, *)}} \circ H_{G(C, (*, 0))}(x_2 \wedge x_1) = s(1, *)y_1 \wedge y_2$ und $H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(x_2) = -s(0, *)y_1$ und $H_{G(C, (*, 1))} \circ d_{G(C, (0, *)), s|_{(0, *)}}(x_1 \wedge x_2) = s(0, *)y_1 \wedge y_2$. Somit ist Gleichung (72) erfüllt. Sei nun $\tau = F_{p,q}$, $p + q \geq 3$. Betrachte zuerst den Fall, dass Anfangs- und Endpunkt des ersten Bogens von C auf dem gleichen Kreis liegen. Dann sind $G(C, a)$ und $G(C, b)$ vom Typ $F_{p,q-1}$. Weiterhin sind $G(C, c)$ und $G(C, d)$ Spaltungen. Es folgt $H_{G(C, d)} \circ d_{G(C, a), s|_a} = 0$ und $\text{sp}(C, b^0) = 1$. Ein zulässiger Kantenzug θ für C , so dass $\phi(\theta)(1)$ der erste Bogen ist, liefert einen zulässigen Kantenzug η für $G(C, b)$. Es gilt $s(\theta) = s(c)s|_b(\eta)$ und $\text{sp}(C, \theta) = (-1)^{1+(k-2)}\text{sp}(G(C, b), \eta)$. Außerdem ist $H_{G(C, c)}(x_{C, F_{p,q}, \theta}) = x_{G(C, b), F_{p,q-1}, \eta}$ und $y_{G(C, b), F_{p,q-1}} = y_{C, F_{p,q}}$. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Betrachte nun den Fall, dass Anfangs- und Endpunkt des ersten Bogens von C auf unterschiedlichen Kreisen liegen. Dann sind $G(C, a)$ und $G(C, b)$ vom Typ $F_{p-1,q}$. Weiterhin sind $G(C, c)$ und $G(C, d)$ Fusionen. Es folgt $d_{G(C, b), s|_b} \circ H_{G(C, c)} = 0$ und $\text{sp}(C, d^0) = q$. Ein zulässiger Kantenzug θ für C , so dass $\phi(\theta)(k)$ der erste Bogen ist, liefert einen zulässigen Kantenzug η für $G(C, a)$. Es gilt $s(\theta) = s|_a(\eta)s(d)$ und $\text{sp}(C, \theta) = (-1)^q\text{sp}(G(C, a), \eta)$. Sei x der Kreis von C , auf dem der Anfangspunkt des ersten Bogens liegt. Dann gilt $x_{C, F_{p,q}, \theta} = x_{G(C, a), F_{p-1,q}, \eta} \wedge x$ und $H_{G(C, d)}(y_{G(C, a), F_{p-1,q}} \wedge x) = -y_{C, F_{p,q}}$. Also ist Gleichung (72) erfüllt.

Dass für $\tau = G_{p,q}$, $p + q \geq 2$, Gleichung (72) gilt, zeigt man analog zu $\tau = F_{p,q}$. Sei nun $u_C = 0$. Wir müssen zeigen, dass dann die rechte Seite von Gleichung (72) trivial ist. Ergibt sich für den ersten Bogen von C eine Situation wie in Abbildung 26, so ist $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C, b))$. Wir prüfen nun nach, dass dann

$$(-1)^{1+k\text{sp}(C, b^0)}s(c)d_{G(C, b), \tau, s|_b} \circ H_{G(C, c)} = (-1)^{\text{sp}(C, d^0)}s(d)H_{G(C, d)} \circ d_{G(C, a), \tau, s|_a} \quad (73)$$

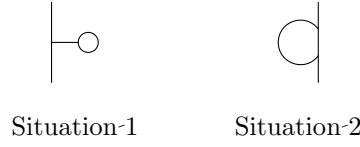


Abbildung 26:

ist, falls $G(C, a)$ vom Typ $\tau \in T$ ist. In Situation 1 ist $\text{sp}(C, b^0) = 0$, in Situation 2 ist $\text{sp}(C, b^0) = 1$. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, a)$. In Situation 1 ist $s(c)s|_b(\theta) = (-1)^{k-1}s(d)s|_a(\theta)$, weil $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K ist für alle $\varepsilon \in \sum(k, 2)$ mit $\varepsilon_1 = *$. In Situation 2 ist $s(c)s|_b(\theta) = (-1)^{k-1-\text{sp}(C, d^0)}s(d)s|_a(\theta)$, weil für alle $\varepsilon \in \sum(k, 2)$ mit $\varepsilon_1 = *$ und $\mu \in \sum(k, 1)$ mit

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 1, \\ \varepsilon_i & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt: Ist $G(C, \mu)$ Spaltung, so ist $G(C, \varepsilon)$ vom Typ A. Ist $G(C, \mu)$ Fusion, so ist $G(C, \varepsilon)$ vom Typ K. Man sieht leicht, dass in Situation 2 Gleichung (73) gilt. In Situation gilt Gleichung (73) wegen Gleichung (64).

Wir werden nun zeigen: Ist $u_C = 0$ und ergibt sich für den ersten Bogen von C keine der beiden Situationen aus Abbildung 26, so ist $H_{G(C, d)} \circ d_{G(C, d), \tau, s|_a} = 0$, falls $G(C, a)$ vom Typ τ ist.

Ist $G(C, b)$ vom Typ σ , so folgt für eine Kantenzuordnung v vom Typ Y bezüglich $m(C^*)$ aus $H_{G(m(C^*), d)} \circ d_{G(m(C^*), a), m(\sigma^*), v|_a} = 0$ und der Dualitätsregel, dass $d_{G(C, b), \sigma, s|_b} \circ H_{G(C, c)} = 0$ ist.

Sei der erste Bogen von C mit γ bezeichnet.

Sei $\tau = A_k$. Dann verbindet γ zwei unterschiedliche Kanten aus einem der beiden Kreise von $G(C, a)$. Dann ist aber $G(C, d)$ Fusion.

Sei $\tau = B_k$. Dann verbindet γ zwei unterschiedliche Kreise von $G(C, a)$. Dann ist aber $G(C, d)$ Spaltung.

Sei $\tau = C_{p, q}$. Dann verbindet γ zwei unterschiedliche Kanten des Kreises von $G(C, a)$, wobei für mindestens eine dieser Kanten gilt: Die beiden Bögen, die diese Kante begrenzen, liegen auf der anderen Seite des Kreises wie γ . Dann ist aber $G(C, d)$ Fusion.

Sei $\tau = D_{p, q}$. Dann ist $G(C, d)$ Spaltung.

Sei $\tau = F_{p, q}$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Für mindestens eine der beiden Kanten, die γ verbindet, gilt: Diese Kante wird von Anfangs- und Endpunkt des gleichen Bogens begrenzt. Dann ist $G(C, d)$ Fusion, aber durch mindestens einen der beiden Kreise aus $\text{akt}(G(C, d))$ ist $y_{G(C, d), F_{p, q}}$ nicht teilbar. (Teilbarkeit sei wie für Monome definiert.)
2. Andernfalls ist $G(C, d)$ Spaltung, aber $y_{G(C, d), F_{p, q}}$ ist durch den aktiven Kreis von $G(C, d)$ teilbar.

Den Fall $\tau = G_{p, q}$ behandelt man analog zu $\tau = F_{p, q}$. □

8 $d \circ d = 0$

Um Satz 65 zu beweisen, reicht es folgendes zu zeigen:

Satz 74. *Sei C eine k -dimensionale orientierte Konfiguration und s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s) = 0.$$

Für $k = 2$ gilt: $d_1(C, s) \circ d_1(C, s) = -\partial(C, s) \circ \partial(C, s) = 0$.

Lemma 75. *Seien C, D k -dimensionale orientierte Konfigurationen mit $\overline{C} = \overline{D}$. Wenn Satz 74 für alle $(k-1)$ -dimensionalen Konfigurationen gilt, dann gibt es für jede Kantenzuordnung s vom Typ Y bezüglich C eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich D , so dass*

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s) = \sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(D, t) \circ d_i(D, t).$$

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, dass sich die Orientierung der Bögen nur beim j -ten Bogen unterscheidet, für $j \in \{1, \dots, k\}$. Nach Satz 71 gibt es eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich D , so dass

$$d(C, s) - d(D, t) = d(C, s) \circ H_j(C, s) - H_j(C, s) \circ d(C, s).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(D, t) \circ d_i(D, t) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (d_{k-i}(C, s) + H_j(C, s) \circ d_{k-i-1}(C, s) - d_{k-i-1}(C, s) \circ H_j(C, s)) \\
&\quad \circ (d_i(C, s) + H_j(C, s) \circ d_{i-1}(C, s) - d_{i-1}(C, s) \circ H_j(C, s)) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s) \\
&\quad - d_{k-i}(C, s) \circ d_{i-1}(C, s) \circ H_j(C, s) \\
&\quad + H_j(C, s) \circ d_{k-i-1}(C, s) \circ d_i(C, s) \\
&\quad + \underbrace{H_j(C, s) \circ d_{k-i-1}(C, s) \circ H_j(C, s) \circ d_{i-1}(C, s)}_{=0} \\
&\quad - \underbrace{H_j(C, s) \circ d_{k-i-1}(C, s) \circ d_{i-1}(C, s) \circ H_j(C, s)}_{=0} \\
&\quad - d_{k-i-1}(C, s) \circ \underbrace{H_j(C, s) \circ H_j(C, s) \circ d_{i-1}(C, s)}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{d_{k-i-1}(C, s) \circ H_j(C, s) \circ d_{i-1}(C, s) + H_j(C, s)}_{=0}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s) \\
&\quad - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_{i-1}(C, s) \right) \circ H_j(C, s)}_{=0} \\
&\quad + H_j(C, s) \circ \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i-1}(C, s) \circ d_i(C, s)}_{=0}
\end{aligned}$$

□

Satz 76. Sei D eine k -dimensionale Konfiguration und seien $\alpha \in \Lambda V(D)$, $\beta \in \Lambda V(D^*)$ Monome. Dann gibt es eine orientierte Konfiguration C , so dass $\overline{C} = D$ und so dass für alle Kantenzuordnungen s vom Typ Y bezüglich C der Koeffizient von

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha)$$

bei β trivial ist.

Aus Lemma 75 und Satz 76 folgt mittels Induktion Satz 74.

Beweis von Satz 76. Wir brauchen nur den Fall zu betrachten, dass D aktiv und $k \geq 3$ ist. Sei D zunächst nicht zusammenhängend. Dann brauchen wir nur den Fall zu betrachten, dass D aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht und für ein $1 \leq n \leq k-1$ die ersten n Bögen von D in der einen Zusammenhangskomponente und die restlichen $k-n$ Bögen in der anderen Zusammenhangskomponente liegen. Seien $a, b \in \Sigma(k, k-n)$ mit

$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \leq n \\ * & \text{für } j > n \end{cases}$$

und

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{für } j \leq n \\ * & \text{für } j > n. \end{cases}$$

Seien $c, d \in \Sigma(k, n)$ mit

$$c_j = \begin{cases} * & \text{für } j \leq n \\ 0 & \text{für } j > n \end{cases}$$

und

$$d_j = \begin{cases} * & \text{für } j \leq n \\ 1 & \text{für } j > n. \end{cases}$$

Zu zeigen ist, dass dann für beliebige C, s gilt:

$$(-1)^{n+(k-n+1)\text{sp}(C, b^0)} d_{G(C, b), s|_b} \circ d_{G(C, c), s|_c} + (-1)^{n-k+(n+1)\text{sp}(C, d^0)} d_{G(C, d), s|_d} \circ d_{G(C, a), s|_a} = 0 \quad (77)$$

Es ist $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C, b))$ und $\text{akt}(G(C, c)) = \text{akt}(G(C, d))$. Seien θ, η zulässige Kantenzüge für $G(C, a)$, $G(C, c)$. Dann ist

$$s|_b(\theta)s|_c(\eta) = (-1)^{n(k-n)-\text{sp}(C, b^0)\text{sp}(C, d^0)} s|_d(\eta)s|_a(\theta).$$

Seien $G(C, a)$, $G(C, c)$ vom Typ $\tau, \sigma \in T$. Dann ist

$$\begin{aligned} & d_{G(C, b), \tau, s|_b} \circ d_{G(C, c), \sigma, s|_c} (x_{G(C, c), \sigma, \eta} \wedge x_{G(C, b), \tau, \theta}) \\ &= s|_c(\eta) \text{sp}(G(C, c), \eta) d_{G(C, b), \tau, s|_b} (y_{G(C, c), \sigma} \wedge x_{G(C, b), \tau, \theta}) \\ &= (-1)^{\text{gr}(y_{G(C, c), \sigma}) \text{gr}(x_{G(C, b), \tau, \theta})} s|_b(\theta) s|_c(\eta) \text{sp}(G(C, b), \theta) \text{sp}(G(C, c), \eta) y_{G(C, b), \tau} \wedge y_{G(C, c), \sigma} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & d_{G(C, d), \sigma, s|_d} \circ d_{G(C, a), \tau, s|_a} (x_{G(C, c), \sigma, \eta} \wedge x_{G(C, b), \tau, \theta}) \\ &= (-1)^{\text{gr}(x_{G(C, c), \sigma, \eta}) \text{gr}(x_{G(C, b), \tau, \theta})} s|_a(\theta) \text{sp}(G(C, a), \theta) d_{G(C, d), \sigma, s|_d} (y_{G(C, a), \tau} \wedge x_{G(C, d), \sigma, \eta}) \\ &= (-1)^{\text{gr}(x_{G(C, c), \sigma, \eta}) (\text{gr}(x_{G(C, b), \tau, \theta}) + \text{gr}(y_{G(C, b), \tau}))} s|_d(\eta) s|_a(\theta) \text{sp}(G(C, d), \eta) \text{sp}(G(C, a), \theta) y_{G(C, d), \sigma} \wedge y_{G(C, a), \tau} \\ &= (-1)^{(\text{gr}(x_{G(C, c), \sigma, \eta}) + \text{gr}(y_{G(C, c), \sigma})) (\text{gr}(x_{G(C, b), \tau, \theta}) + \text{gr}(y_{G(C, b), \tau})) + n(k-n) - \text{sp}(C, b^0) \text{sp}(C, d^0)} d_{G(C, b), \tau, s|_b} \circ d_{G(C, c), \sigma, s|_c} (x_{G(C, c), \sigma, \eta} \wedge x_{G(C, b), \tau, \theta}). \end{aligned}$$

Wegen Gleichung (64) gilt:

$$\begin{aligned} & (\text{gr}(x_{G(C, c), \sigma, \eta}) + \text{gr}(y_{G(C, c), \sigma})) (\text{gr}(x_{G(C, b), \tau, \theta}) + \text{gr}(y_{G(C, b), \tau})) \\ & \equiv (\text{sp}(C, b^0) - n + 1) (\text{sp}(C, d^0) - (k - n) + 1) \pmod{2} \end{aligned}$$

Es folgt Gleichung (77). Sei D nun zusammenhängend.

Lemma 78. *Gehen D_1, D_2 durch Rotation auseinander hervor (siehe Abbildung 7), dann gilt Satz 76 für (D_1, α, β) genau dann, wenn er für (D_2, α, β) gilt.*

Beweis. Sei C_1 orientierte Konfiguration mit $\overline{C_1} = D_1$ und s Kantenzuordnung vom Typ bezüglich C_1 . Dann sei C_2 orientierte Konfiguration mit $\overline{C_2} = D_2$, die sich wie in Abbildung 27 aus C_1 ergibt. Dann ist s Kantenzuordnung vom Typ

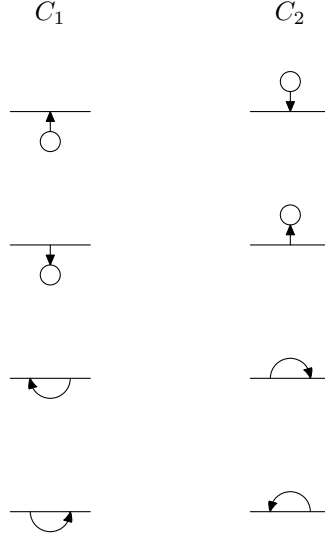


Abbildung 27:

Y bezüglich C_2 und $d_i(C_1, s) = d_i(C_2, s)$ für $i = 1, \dots, k$. □

Für ein Monom $\alpha \in \Lambda V(D)$ sagen wir Satz 76 gilt für (D, α) , falls Satz 76 für alle Monome $\beta \in \Lambda V(D^*)$ für (D, α, β) gilt.

Für ein Monom $\beta \in \Lambda V(D^*)$ sagen wir Satz 76 gilt für (D, β) , falls Satz 76 für alle Monome $\alpha \in \Lambda V(D)$ für (D, α, β) gilt.

Lemma 79. *Enthalte D einen Kreis x_1 , der nur von einem Bogen γ getroffen wird. Wir nennen x_1 dann einen Grad 1 Kreis von D . Sei x_2 der andere Kreis, der von γ getroffen wird und $\alpha \in \Lambda V(D)$ Monom.*

1. Ist α nicht durch x_1 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, α) .
2. Ist α durch x_2 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, α) .

Beweis. Ohne Einschränkung sei γ der erste Bogen von D . Seien C, s wie in Satz 76.

1. Seien $a = (0, *, \dots, *)$, $b = (1, *, \dots, *) \in \Sigma(k, k-1)$, sowie $c = (*, 0, \dots, 0)$, $d = (*, 1, \dots, 1) \in \Sigma(k, 1)$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha) = -d_{G(C, b), s|_b} \circ d_{G(C, c), s|_c}(\alpha) + (-1)^{k-1} d_{G(C, d), s|_d} \circ d_{G(C, a), s|_a}(\alpha)$$

Es ist $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C, b))$ und $\text{akt}(G(C, c)) = \text{akt}(G(C, d))$. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, a)$. Dann ist $s|_b(\theta)s(c) = (-1)^{k-1}s(d)s|_a(\theta)$. Somit ist $\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha) = 0$.

- Wegen 1. genügt es den Fall zu betrachten, dass α durch x_1 und x_2 teilbar ist. Für $\varepsilon \in \sum(k, i)$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $\varepsilon^0 = (0, \dots, 0)$ gilt: Ist $\varepsilon_1 = *$, so ist $d_{G(C, \varepsilon), s|_e}(\alpha) = 0$. Sei $\eta \in \sum(k, k-i)$ mit $\eta^0 = \varepsilon^1$. Ist $\varepsilon_1 \neq *$, so ist $d_{G(C, \eta), s|_h} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_e}(\alpha) = 0$ wegen der Filtrierungsregel.

□

Lemma 80. *Enthalte D^* einen Kreis x_1 , der nur von einem Bogen γ getroffen wird. Sei x_2 der andere Kreis, der von γ getroffen wird und $\beta \in \Lambda V(D^*)$ Monom.*

- Ist β durch x_1 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, β) .
- Ist β nicht durch x_2 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, β) .

Beweis. Ohne Einschränkungen sei γ der erste Bogen von D^* . Seien C, s, α wie in Satz ??.

- Seien a, b, c, d wie im Beweis von Lemma 79. Dann ist der Koeffizient bei β von $\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha)$ gleich dem Koeffizienten bei β von

$$(-1)^{1+k} d_{G(C, b), s|_b} \circ d_{G(C, c), s|_c}(\alpha) + (-1)^{k-1} d_{G(C, d), s|_d} \circ d_{G(C, a), s|_a}(\alpha).$$

Es ist $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C, b))$ und $\text{akt}(G(C, c)) = \text{akt}(G(C, d))$. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, a)$. Dann ist $s|_b(\theta)s(c) = (-1)^{k-1-\text{sp}(C, d^0)}s(d)s|_a(\theta)$. Mit Gleichung (64) folgt, dass der Koeffizient bei β von $\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha)$ trivial ist.

- Wegen 1. genügt es den Fall zu betrachten, dass β nicht durch x_1 und nicht durch x_2 teilbar ist. Die Aussage folgt aus dem Beweis von 2. aus Lemma 79 und der Dualitätsregel.

□

Lemma 81. *Enthalte D einen Kreis x_1 , der von genau zwei Bögen γ_1, γ_2 getroffen wird. Weiterhin sollen γ_1, γ_2 jeweils nur einen Randpunkt auf x_1 haben. Seien x, x' die anderen Kreise, die von γ_1, γ_2 getroffen werden und $\alpha \in \Lambda V(D)$ ein Monom.*

- Ist α nicht durch x_1 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, α) .
- Ist α durch x_1, x und x' teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, α) .

Beweis. Ohne Einschränkung seien γ_1 und γ_2 der erste und zweite Bogen von D .

- Sei C so, dass γ_1^1 und γ_2^0 auf x_1 liegen. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Seien $a = (*, 0, \dots, 0)$, $b = (0, *, 0, \dots, 0) \in \sum(k, 1)$, sowie $c = (1, *, \dots, *)$, $d = (*, 1, *, \dots, *) \in \sum(k, k-1)$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha) = -d_{G(C, c), s|_c} \circ d_{G(C, a), s|_a}(\alpha) - d_{G(C, d), s|_d} \circ d_{G(C, b), s|_b}(\alpha)$$

Liegen x und x' in der gleichen Zusammenhangskomponente von $S^2 \setminus x_1$, dann ist $G(C, c) = G(C, d)$. Andernfalls gibt es 3 Möglichkeiten: Entweder $G(C, c)$ und $G(C, d)$ sind beide von keinem Typ $\tau \in T$ oder es gibt p, q , so dass $G(C, c)$ und $G(C, d)$ beide vom Typ $F_{p,q}$ sind oder es gibt p, q , so dass $G(C, c)$ und $G(C, d)$ beide vom Typ $G_{p,q}$ sind. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, c)$. Dann ist $s|_c(\theta)s(a) = -s|_d(\theta)s(b)$. Somit ist $\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha) = 0$.

2. Sei C so, dass γ_1^1 und γ_2^1 auf x_1 liegen. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $\varepsilon \in \sum(k, i)$, mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $\varepsilon^0 = (0, \dots, 0)$. Gilt $\varepsilon_1 = *$ oder $\varepsilon_2 = *$, dann folgt aus $d_{G(C, \varepsilon), s|_\varepsilon}(\alpha) \neq 0$ und der Tatsache, dass α durch x_1, x, x' teilbar ist, dass $G(C, \varepsilon)$ vom Typ B_i oder $D_{p,q}$ ist. Widerspruch. Gilt $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$, so sei $\eta \in \sum(k, k-i)$ mit $\eta^0 = \varepsilon^1$. Aus $d_{G(C, \eta), s|_\eta} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_\varepsilon}(\alpha) \neq 0$, der Tatsache, dass α durch x_1, x, x' teilbar ist und der Filtrierungsregel folgt, dass $G(C, \eta)$ vom Typ B_{k-i} oder $D_{p,q}$ ist. Widerspruch.

□

Lemma 82. Ersetze in Lemma 81 D durch D^* . Sei $\beta \in \Lambda V(D^*)$ Monom.

1. Ist β durch x_1 teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, β) .
2. Ist β nicht durch x_1 und nicht durch x und nicht durch x' teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, β) .

Beweis. Ohne Einschränkung seien γ_1 und γ_2 der erste und zweite Bogen von D^* .

1. Sei C so, dass γ_1^1 und γ_2^0 auf x_1 liegen. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C und $\alpha \in \Lambda V(D)$ Monom. Seien $a = (*, 1, \dots, 1)$, $b = (1, *, 1, \dots, 1) \in \sum(k, 1)$, sowie $c = (0, *, \dots, *)$, $d = (*, 0, *, \dots, *) \in \sum(k, k-1)$. Wegen des Beweises von 1. aus Lemma 81 und der Dualitätsregel ist der Koeffizient bei β von $\sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(C, s) \circ d_i(C, s)(\alpha)$ gleich dem Koeffizienten bei β von $(-1)^{k-1} d_{G(C, a), s|_a} \circ d_{G(C, c), s|_c}(\alpha) + (-1)^{k-1} d_{G(C, b), s|_b} \circ d_{G(C, d), s|_d}(\alpha)$. Die Konfigurationen $m(G(C, c)^*)$ und $m(G(C, d)^*)$ wurden im Beweis des 1. Teils von Lemma 81 besprochen. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, c)$. Dann ist $s(a)s|_c(\theta) = s(b)s|_d(\theta)$. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus $f : \Lambda V(G(C, a^0)) \rightarrow \Lambda V(G(C, b^0))$. Es ist $s|_c(\theta)f \circ d_{G(C, c), s|_c} = s|_d(\theta)d_{G(C, d), s|_d}$. Sei $\lambda \in \Lambda V(G(C, a^0))$ Monom. Dann ist der Koeffizient bei β von $s(a)d_{G(C, a), s|_a}(\lambda)$ gleich dem Koeffizienten bei β von $-s(b)d_{G(C, b), s|_b} \circ f(\lambda)$.
2. Die Aussage folgt aus dem Beweis von 2. aus Lemma 81 und der Dualitätsregel.

□

Definition 83. Für zwei Konfigurationen D, D' sagen wir, diese gehen durch Tausch auseinander hervor, falls wir D' durch endlich viele lokale Veränderungen wie in Abbildung 28 aus D erhalten können.

Lemma 84. Gehen D, D' durch Tausch auseinander hervor, dann gilt Satz 76 für D genau dann, wenn er für D' gilt.

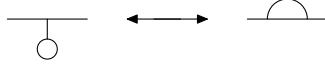


Abbildung 28: Tausch

Beweis. Sei D wie die linke Seite von Abbildung 28 und D' wie die rechte Seite. Seien die Bezeichnungen der Bögen und Kanten wie in Abbildung 29. In der



Abbildung 29:

Ordnung der Bögen sollen γ und γ' an erster Stelle stehen. In der Ordnung der Kanten sollen e_1/e_2 und e'_1/e'_2 an erster/zweiter Stelle stehen. Seien $\alpha \in \Lambda V(D)$, $\beta \in \Lambda V(D^*)$, $\alpha' \in \Lambda V(D')$, $\beta' \in \Lambda V((D')^*)$ Monome. Nach Lemma 79 genügt es den Fall zu betrachten, dass α durch $x_D(1)$, aber nicht durch $x_D(2)$ teilbar ist. Nach der Filtrierungsregel genügt es den Fall zu betrachten, dass β durch $x_{D^*}(1)$ teilbar ist. Nach Lemma 80 genügt es den Fall zu betrachten, dass β' durch $x_{(D')^*}(2)$, aber nicht durch $x_{(D')^*}(1)$ teilbar ist. Nach der Filtrierungsregel genügt es, den Fall zu betrachten, dass α' nicht durch $x_{D'}(1)$ teilbar ist. Seien C, C' wie in Abbildung 30. Bei den anderen Bögen sollen sich C und C' nicht unterscheiden.



Abbildung 30:

Sei s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Für $\varepsilon \in \Sigma(k, 1)$ sei

$$s'(\varepsilon) = \begin{cases} s(\varepsilon) & \text{falls } \varepsilon_1 \neq *, \\ (-1)^{\text{sp}(C, \varepsilon^0)} s(\varepsilon) & \text{falls } \varepsilon_1 = *. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass s' Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C' ist. Seien $a \in \Sigma(k, i)$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $b \in \Sigma(k, k-i)$ mit $a^1 = b^0$. Sei weiterhin $\omega \in \Lambda V(D)$, $\rho \in \Lambda V(D^*)$ Monome, so dass ω nicht durch $x_D(1)$ oder $x_D(2)$ und ρ nicht durch $x_{D^*}(1)$ teilbar ist. Wir werden nun zeigen, dass der Koeffizient bei $x_{D^*}(1) \wedge \rho$ von

$$(-1)^{(k-i+1)\text{sp}(C, b^0)} d_{G(C, b), s|_b} \circ d_{G(C, a), s|_a} (x_D(1) \wedge \omega)$$

gleich dem Koeffizienten bei $x_{(D')^*}(2) \wedge \rho$ von

$$(-1)^k (-1)^{(k-i+1)\text{sp}(C', b^0)} d_{G(C', b), s'|_b} \circ d_{G(C', a), s'|_a} (\omega)$$

ist.

Sei zunächst $a_1 = *$. Dann ist $\text{akt}(G(C, b)) = \text{akt}(G(C', b))$. Es gibt zwei Möglichkeiten: Entweder sind sowohl $G(C, a)$, als auch $G(C', a)$ von keinem Typ aus T oder es gibt $p \geq 1, q \geq 0$, so dass $G(C, a)$ vom Typ $F_{p,q}$ und $G(C', a)$ vom Typ $F_{p-1,q+1}$ ist. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, a)$, so dass $\phi(\theta)(1) = 1$. Dann ist $s|_a(\theta) = s'|_a(\theta)$ und $\text{sp}(G(C, a), \theta) = (-1)^{i-1} \text{sp}(G(C', a), \theta)$ und $\text{sp}(C, b^0) + 1 = \text{sp}(C', b^0)$. Es folgt die behauptete Gleichheit der Koeffizienten.

Sei nun $a_1 = 0$. Dann ist $\text{akt}(G(C, a)) = \text{akt}(G(C', a))$. Für $G(C, b)$ und $G(C', b)$ gibt es die zwei beschriebenen Möglichkeiten. Sei θ ein zulässiger Kantenzug für $G(C, b)$, so dass $\phi(\theta)(1) = 1$. Dann ist $s|_b(\theta) = (-1)^{\text{sp}(C, b^0)} s'|_b(\theta)$ und $\text{sp}(G(C, b), \theta) = (-1)^{k-i-1} \text{sp}(G(C', b), \theta)$ und $\text{sp}(C, b^0) = \text{sp}(C', b^0)$. Mit Gleichung (64) folgt die behauptete Gleichheit der Koeffizienten.

Kehrt man bei C die Orientierung von γ und bei C' die Orientierung von γ' um, so erhält man wieder die Gleichheit der Koeffizienten, allerdings nun mit dem Vorzeichen $(-1)^{k+1}$ statt $(-1)^k$, da wir $F_{p,q}$ und $F_{p-1,q+1}$ durch $G_{p,q}$ und $G_{p-1,q+1}$ ersetzen müssen. \square

Lemma 85. *Hat D mindestens zwei Kreise und ist das Monom $\alpha \in \Lambda V(D)$ durch alle Kreise von D teilbar, dann gilt Satz 76 für (D, α) .*

Beweis. Sei x_1 der erste Kreis von D . Sei n die Anzahl der Bögen, die genau einen Randpunkt auf x_1 haben. Es gilt $n \geq 1$. Ohne Einschränkung stehen diese n Bögen in der Ordnung der Bögen an den Stellen 1 bis n . Sei C so, dass alle diese Bögen ihren Anfangspunkt auf x_1 haben. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $\varepsilon \in \sum(k, i)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ mit $\varepsilon^0 = (0, \dots, 0)$. Aus $d_{G(C, \varepsilon), s|_e}(\alpha) \neq 0$ folgt, dass $G(C, \varepsilon)$ vom Typ B_i oder $D_{p,q}$ ist. Also ist $\varepsilon_j = 0$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Sei $\eta \in \sum(k, k-i)$ mit $\eta^0 = \varepsilon^1$. Aus $d_{G(C, \eta), s|_h} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_e}(\alpha) \neq 0$ und der Filtrierungsregel folgt, dass $G(C, \eta)$ vom Typ B_{k-i} oder $D_{p,q}$ ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu $\varepsilon_j = *$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. \square

Korollar 86. *Hat D^* mindestens zwei Kreise, dann gilt Satz 76 für $(D, 1 \in \Lambda V(D^*))$.*

Lemma 87. *Enthalte D mindestens eine der lokalen Konfigurationen M_1, M_2, \dots, M_9 aus Abbildung 31. Dann gilt Satz 76 für D .*

Beweis. Durch Rotation und Tausch gehen M_2 und M_3 aus M_1 , M_5 aus M_4 , sowie M_7 aus M_6 hervor.

M_1 : Nach Lemma 79 reicht es den Fall zu betrachten, dass α durch x_1 und x_2 teilbar ist. Sei C so, dass γ_1^0 auf x_1 und γ_2^1 auf x_2 liegt. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Ohne Einschränkungen seien γ_1 und γ_2 der erste und zweite Bogen von D . Seien $\varepsilon \in \sum(k, i)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $\eta \in \sum(k, k-i)$ mit $\varepsilon^1 = \eta^0$. Ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = *$, so ist $G(C, \varepsilon)$ von keinem Typ aus T . Ist $\eta_1 = \eta_2 = *$, so ist $G(C, \eta)$ von keinem Typ aus T . Ist $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (*, 0)$ oder $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, *)$, so ist wegen der Filtrierungsregel $d_{G(C, \eta), s|_h} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_e}(\alpha) = 0$.

M_4 : Ist α durch x_2 teilbar, so kann man den 2. Teil von Lemma 79 anwenden. Ist α nicht durch x_2 teilbar, so kann man den 1. Teil von Lemma 81 anwenden.

M_6 : 2. Teil von Lemma 80 und 1. Teil von Lemma 82.

M_8 : Nach Lemma 81 reicht es den Fall zu betrachten, dass α durch x_1 und x_2 teilbar ist. Sei C so, dass γ_1^1 und γ_2^1 auf x_1 und γ_3^0 auf x_2 liegen. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Ohne Einschränkungen seien γ_1, γ_2 und γ_3 der erste, zweite und dritte Bogen von D . Seien $\varepsilon \in \sum(k, i)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$

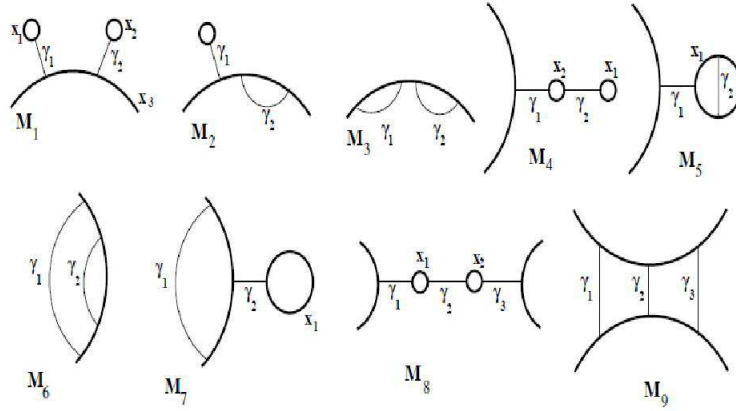


Abbildung 31: aus [4]

und $\eta \in \Sigma(k, k-i)$ mit $\varepsilon^1 = \eta^0$. Sind mindestens 2 der ersten 3 Komponenten von ε ein $*$, dann ist $d_{G(C, \varepsilon), s|_C}(\alpha) = 0$. Ist $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (0, *, 0)$, so ist $d_{G(C, \varepsilon), s|_C}(\alpha) = 0$. Ist $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (*, 0, 0)$ oder $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (0, 0, *)$, so ist $d_{G(C, \eta), s|_\eta} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_C}(\alpha) = 0$ wegen der Filtrierungsregel. Ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, so ist $G(C, \eta)$ von keinem Typ aus T.

M_9 : Folgt mittels Lemma 82 und der Dualitätsregel aus M_8 . \square

Lemma 88. Ist D dreidimensional, so gilt Satz 76 für D .

Beweis. In Abbildung 8 ist aufgelistet, welche Möglichkeiten es für eine zusammenhängende, nichtorientierte, dreidimensionale Konfiguration modulo Rotation gibt. Durch Lemma 87 werden die Fälle 1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 16 und 17 abgedeckt. Sei C wie in Abbildung 32. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Ohne Einschränkungen seien γ_1, γ_2 und γ_3 der erste, zweite und dritte Bogen von D . Seien $\varepsilon \in \Sigma(3, i)$ für $i \in \{1, 2\}$ und $\eta \in \Sigma(3, 3-i)$ mit $\varepsilon^1 = \eta^0$. Fall 4: Nach Lemma 79 und Lemma 81 reicht es $\alpha = x_1 \wedge x_3$ zu betrachten. Dann ist aber stets $d_{G(C, \eta), s|_\eta} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_C}(\alpha) = 0$.

Fall 12: Folgt mit Lemma 80 und Lemma 82 und der Dualitätsregel aus Fall 4.

Fall 8: Nach Lemma 81 reicht es $\alpha = x_1$ zu betrachten. Dann ist aber stets $d_{G(C, \eta), s|_\eta} \circ d_{G(C, \varepsilon), s|_C}(\alpha) = 0$.

Fall 18: Folgt mit Lemma 82 und der Dualitätsregel aus Fall 8.

Fall 9: Nach Lemma 79 reicht es $\alpha = x_1$ zu betrachten. Sei y der Kreis von C^* . Es gilt:

$$d_2(C, s) \circ d_1(C, s) + d_1(C, s) \circ d_2(C, s) = d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}} \circ d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}} + d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}} \circ d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}}$$

In Abbildung 33 sind $G(C, (1, *, *))$ und $G(C, (*, 1, 1))$ dargestellt. Es ist $d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}}(x_1) = s(*, 0, 0)(z_3 - z_2) \wedge z_1$ und $d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}}((z_3 - z_2) \wedge z_1) = s(1, *, 0)s(1, 1, *)y$. Weiterhin ist $d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}}(x_1) = -s(0, *, 0)s(0, 1, *)w_1$ und $d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}}(w_1) = s(*, 1, 1)y$. Außerdem gilt $s(*, 0, 0)s(1, *, 0)s(1, 1, *) = s(0, *, 0)s(0, 1, *)s(*, 1, 1)$.

Fall 10: Nach Lemma 79 reicht es $\alpha = x_1$ zu betrachten. Sei y der Kreis von C^* . Es gilt:

$$d_2(C, s) \circ d_1(C, s) + d_1(C, s) \circ d_2(C, s) = d_{G(C, (1, *, 1)), s|_{(1, *, 1)}} \circ d_{G(C, (*, 0, *)), s|_{(*, 0, *)}} + d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}} \circ d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}}$$

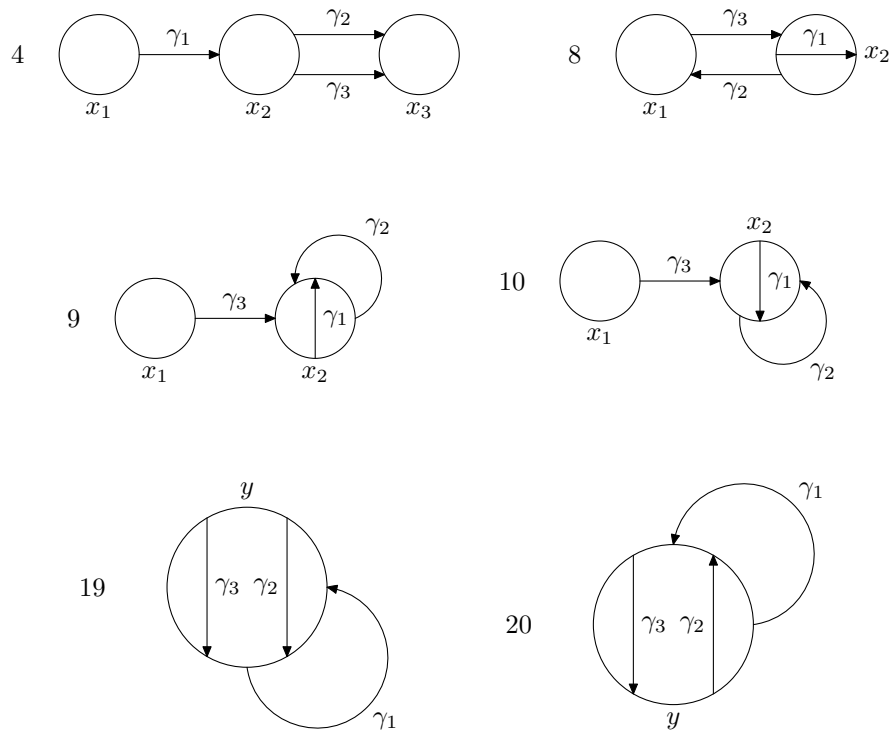


Abbildung 32:

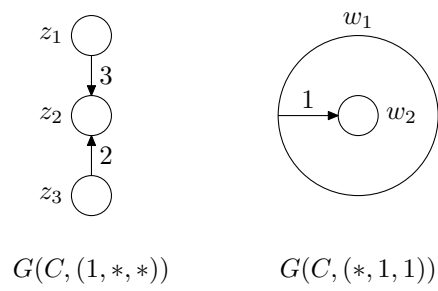


Abbildung 33:

In Abbildung 34 sind $G(C, (1, *, 1))$ und $G(C, (*, 1, 1))$ dargestellt. Es ist $d_{G(C, (*, 0, *)), s|_{(*, 0, *)}}(x_1) =$

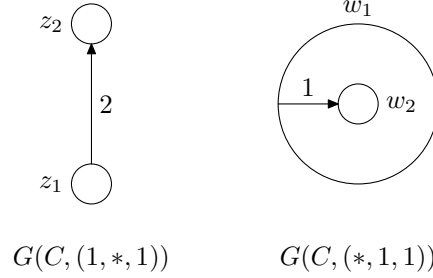


Abbildung 34:

$s(0, 0, *)s(*, 0, 1)z_1$ und $d_{G(C, (1, *, 1)), s|_{(1, *, 1)}}(z_1) = s(1, *, 1)y$. Weiterhin ist $d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}}(x_1) = s(0, 0, *)s(0, *, 1)w_1$ und $d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}}(w_1) = s(*, 1, 1)y$. Außerdem gilt $s(*, 0, 1)s(1, *, 1) = -s(0, *, 1)s(*, 1, 1)$.

Fall 19: Es ist $m(C^*)$ gleich dem C aus Fall 10, dies liefert uns Bezeichnungen für die Kreise von C^* . Es gilt:

$$d_2(C, s) \circ d_1(C, s) + d_1(C, s) \circ d_2(C, s) = d_{G(C, (*, 1, *)), s|_{(*, 1, *)}} \circ d_{G(C, (0, *, 0)), s|_{(0, *, *)}} + d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}} \circ d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}}$$

In Abbildung 35 sind $G(C, (*, 1, *))$ und $G(C, (1, *, *))$ dargestellt. Es ist $d_2(C, s) \circ$

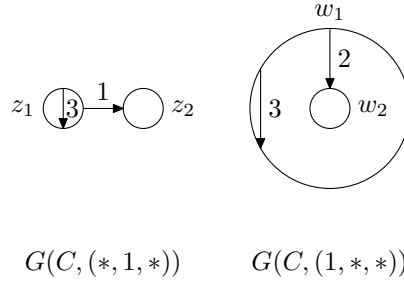


Abbildung 35:

$d_1(C, s)(y) = 0$. Es ist $d_{G(C, (0, *, 0)), s|_{(0, *, *)}}(1) = s(0, *, 0)(z_1 - z_2)$ und $d_{G(C, (*, 1, *)), s|_{(*, 1, *)}}(z_1 - z_2) = -s(*, 1, 0)s(1, *, *)x_2$. Weiterhin ist $d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}}(1) = s(*, 0, 0)(w_1 - w_2)$ und $d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}}(w_1 - w_2) = -s(1, *, 0)s(1, *, *)x_2$. Außerdem gilt $s(0, *, 0)s(*, 1, 0) = -s(*, 0, 0)s(1, *, 0)$.

Fall 20: Es ist $m(C^*)$ gleich dem C aus Fall 9, dies liefert uns Bezeichnungen für die Kreise von C^* . Es gilt:

$$d_2(C, s) \circ d_1(C, s) + d_1(C, s) \circ d_2(C, s) = d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}} \circ d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}} + d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}} \circ d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}}$$

In Abbildung 36 sind $G(C, (*, 1, 1))$ und $G(C, (1, *, *))$ dargestellt. Es ist $d_2(C, s) \circ d_1(C, s)(y) = 0 = d_1(C, s) \circ d_2(C, s)(y)$. Es ist $d_{G(C, (0, *, *)), s|_{(0, *, *)}}(1) = s(0, *, 0)s(0, 1, *)z_2$ und $d_{G(C, (*, 1, 1)), s|_{(*, 1, 1)}}(z_2) = s(*, 1, 1)x_2$. Weiterhin ist $d_{G(C, (*, 0, 0)), s|_{(*, 0, 0)}}(1) = s(*, 0, 0)(w_1 - w_2)$ und $d_{G(C, (1, *, *)), s|_{(1, *, *)}}(w_1 - w_2) = -s(1, *, 0)s(1, *, *)x_2$. Außerdem gilt $s(0, *, 0)s(0, 1, *)s(*, 1, 1) = s(*, 0, 0)s(1, *, 0)s(1, 1, *)$. \square

Sei ab jetzt $k \geq 4$.

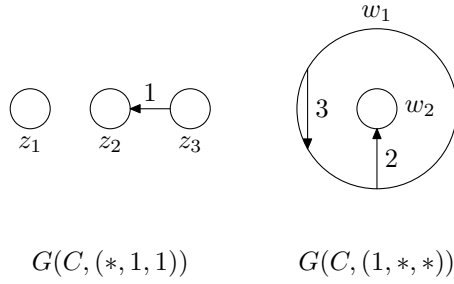


Abbildung 36:

Lemma 89. Seien D, α, β wie in Satz 76. Es gebe eine orientierte Konfiguration B , so dass $\bar{B} = D$ und eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich B , so dass der Koeffizient von $d_1(B, t) \circ d_{k-1}(B, t)(\alpha)$ bei β nicht trivial ist. Dann gilt Satz 76 für (D, α, β) .

Beweis. Es gibt $\varepsilon \in \Sigma(k, k-1)$ und $\eta \in \Sigma(k, 1)$ mit $\varepsilon^1 = \eta^0$ und ein Monom $z \in \Lambda V(G(D, \varepsilon^1))$, so dass der Koeffizient bei z von $d_{G(B, \varepsilon), t|_B}(\alpha)$, sowie der Koeffizient bei β von $d_{G(B, \eta), t|_B}(z)$ nicht trivial ist. Der Bogen von $G(D, \eta)$ sei mit δ bezeichnet. Es gibt 3 Fälle:

- (i) δ verbindet zwei aktive Kreise von $(G(D, \varepsilon))^*$.
- (ii) δ verbindet einen aktiven Kreis von $(G(D, \varepsilon))^*$ mit einem passiven Kreis.
- (iii) δ hat beide Randpunkte auf dem gleichen aktiven Kreis von $(G(D, \varepsilon))^*$.

$G(B, \varepsilon)$ ist von genau einem Typ $\tau \in T$. Unterscheide nun die möglichen Fälle. Sei $\tau = A_{k-1}$. Im Fall (i) ist $G(D, \varepsilon)$ aktiv. Es folgt $\alpha = 1, z = 1, \beta = 1$. Nun können wir Korollar 86 anwenden. In den Fällen (ii) und (iii) enthält D die M_9 Konfiguration aus Abbildung 31.

Sei $\tau = B_{k-1}$. Im Fall (ii) können wir den 2. Teil von Lemma 79 anwenden. In den Fällen (i) und (iii) können wir Lemma 85 anwenden.

Sei $\tau = C_{p,q}$. Im Fall (i) müssen wir nur $\alpha = 1, \beta = 1$ betrachten. $G(D, \varepsilon^1)$ hat $k-2$ Kreise, somit hat D^* $k-3$ Kreise. Für $k \geq 5$ können wir Korollar 86 anwenden. Für $k = 4$ gibt es für D die zwei Möglichkeiten aus Abbildung 37. Sei



Abbildung 37:

C wie in Abbildung 38 und sei s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $a \in \Sigma(4, 3)$ mit $a^0 = (0, 0, 0, 0)$. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T . $d_3(C, s) \circ d_1(C, s)(1)$ hat bei 1 den Koeffizienten 0, wegen der Filtrierungsregel. Für die rechte Seite von Abbildung 38 gilt: Ist $a \in \Sigma(4, 2)$ mit $a^0 = (0, 0, 0, 0)$, so ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T . Für die linke Seite von Abbildung 38 gilt: Es gibt genau ein $a \in \Sigma(4, 2)$ mit $a^0 = (0, 0, 0, 0)$, so dass $G(C, a)$ von einem Typ aus T ist. Der Typ ist $F_{0,2}$. Somit ist der Koeffizient von $d_2(C, s) \circ d_2(C, s)(1)$ bei 1 trivial, wegen der Filtrierungsregel.



Abbildung 38:

Betrachte nun Fall (ii). Für $q \geq 5$ oder $p \geq 3$ enthält D die Konfiguration M_9 . Modulo Rotation können alle Möglichkeiten für D , die nicht M_9 enthalten, aus der linken Konfiguration in Abbildung 39 durch Entfernen von Bögen gewonnen werden. Wir können sogar verlangen, dass höchstens zwei der vier Bögen aus

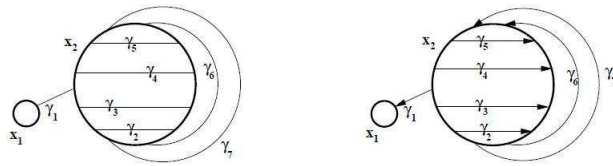


Abbildung 39: aus [4]

dem Innern des großen Kreises entfernt werden. Eine orientierte Konfiguration C mit $\overline{C} = D$ ergibt sich aus der rechten Seite von Abbildung 39. Sei $a \in \Sigma(k, i)$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $a^0 = (0, \dots, 0)$ und so dass $G(C, a)$ von einem Typ aus T ist. Dann ist $i = 1$ oder a entspricht den Bögen γ_1, γ_2 oder a entspricht den Bögen γ_1, γ_3 . Sei $b \in \Sigma(k, k-i)$ mit $b^0 = a^1$. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T .

Im Fall (iii) lässt sich D per Tausch in Fall (ii) überführen oder D enthält die Konfiguration M_9 oder D ist wie in Abbildung 40. Dann ist D^* wie in Abbildung

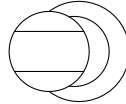


Abbildung 40:

41. Nach Lemma 82 genügt es $\beta = y_1$ zu betrachten. Nach der Filtrierungsregel genügt es $\alpha = 1$ zu betrachten. Sei C wie in Abbildung 42. Sei s eine Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $a \in \Sigma(4, i)$ mit $i \in \{2, 3\}$ und $a^0 = (0, 0, 0, 0)$. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T . $d_3(C, s) \circ d_1(C, s)(1)$ hat bei y_1 den Koeffizienten 0, wegen der Filtrierungsregel.

Sei $\tau = D_{p,q}$. Dann ist Fall (i) nicht möglich. Im Fall (ii) können wir den 2. Teil von Lemma 79 anwenden. Im Fall (iii) können wir Lemma 85 anwenden.

Sei $\tau = F_{p,q}$ oder $\tau = G_{p,q}$. D enthalte, auch nach Rotation, keine der lokalen Konfigurationen aus Abbildung 31. Dann gibt es für D bis auf Rotation und Tausch folgende Möglichkeiten. D ist eine der vier Konfigurationen aus Abbildung 43 (wobei wir die Orientierung der Bögen vergessen) oder D ist die 3. Konfiguration aus Abbildung 43, wobei γ_2 und x_2 entfernt seien oder D ist die 4. Konfiguration, wobei γ_2 und x_2 entfernt seien oder D ist die 4. Konfiguration,

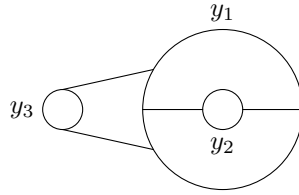


Abbildung 41:

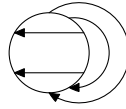


Abbildung 42:

wobei γ_3 und x_3 entfernt seien. Nach Lemma 79 und Lemma 81 müssen wir

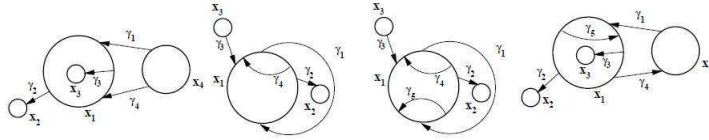


Abbildung 43: aus [4]

nur den Fall betrachten, dass α nicht durch x_1 , aber durch alle anderen Kreise von D teilbar ist. Sei C wie in Abbildung 43. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $a \in \sum(k, i)$ für $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $b \in \sum(k, k-i)$ mit $a^1 = b^0$. Man prüft leicht nach, dass $d_{G(C,b),s|_b} \circ d_{G(C,a),s|_a}(\alpha)$ stets trivial ist. \square

Korollar 90. Seien D, α, β wie in Satz 76. Es gebe eine orientierte Konfiguration B , so dass $\bar{B} = D$ und eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich B , so dass der Koeffizient von $d_{k-1}(B, t) \circ d_1(B, t)(\alpha)$ bei β nicht trivial ist. Dann gilt Satz 76 für (D, α, β) .

Beweis. Beweis von Lemma 89 und Dualitätsregel. \square

Lemma 91. Seien D, α, β wie in Satz 76. Es gebe eine orientierte Konfiguration B , so dass $\bar{B} = D$ und eine Kantenzuordnung t vom Typ Y bezüglich B und $n \in \{2, \dots, k-2\}$, so dass der Koeffizient von $d_{k-n}(B, t) \circ d_n(B, t)(\alpha)$ bei β nicht trivial ist. Dann gilt Satz 76 für (D, α, β) .

Beweis. Es gibt $\varepsilon \in \sum(k, n)$ und $\eta \in \sum(k, k-n)$ mit $\varepsilon^1 = \eta^0$ und ein Monom $z \in \Lambda V(G(D, \varepsilon^1))$ und $Q = (\tau, \sigma) \in T^2$, so dass der Koeffizient bei z von $d_{G(B,\varepsilon),\tau,t|_e}(\alpha)$, sowie der Koeffizient bei β von $d_{G(B,\eta),\sigma,t|_n}(z)$ nicht trivial ist. Seien

$$\begin{aligned} T_1 &:= \{A_m, C_{p,q} \mid m, p, q \in \mathbb{N}, p \leq q\} \subset T, \\ T_2 &:= \{B_m, D_{p,q} \mid m, p, q \in \mathbb{N}, p \leq q\} \subset T. \end{aligned}$$

Da D zusammenhängend ist, gilt $Q \notin T_1 \times T_2$ und $Q \notin T_2 \times T_1$. Im Fall $Q \in T_2 \times T_2$ ist α durch alle Kreise von D teilbar. Nach Lemma 85 brauchen wir nur den Fall

zu betrachten, dass D genau einen Kreis hat. Also ist $Q = (D_{1,1}, D_{1,1})$ und es gibt für D die fünf Möglichkeiten aus Abbildung 44 (wobei wir die Orientierung der Bögen vergessen). Sei C wie in Abbildung 44. Sei $a \in \Sigma(4, i)$ mit $i \in \{2, 3\}$ und

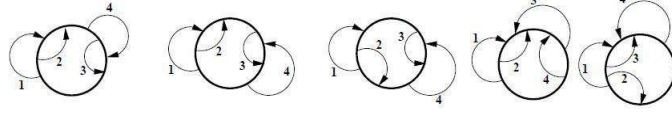


Abbildung 44: aus [4]

$a^0 = (0, 0, 0, 0)$. Dann ist $G(C, a)$ von keinem Typ aus T oder vom Typ $F_{0,2}$ oder vom Typ $G_{0,2}$. Sei $b \in \Sigma(4, 3)$ mit $b^1 = (1, 1, 1, 1)$. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T . Aus der Behandlung des Falles $Q \in T_2 \times T_2$ folgt der Fall $Q \in T_1 \times T_1$. Sei

$$T_3 := \{F_{p,q}, G_{p,q} \mid p, q \in \mathbb{N}_0, p + q \geq 1\} \subset T.$$

Sei $Q \in T_3 \times \{A_{k-n}\}$. Dann ist z durch den Kreis x teilbar, der von mindestens zwei Bögen aus $(G(D, \varepsilon))^*$ getroffen wird. Also ist x passiver Kreis von $G(D, \eta)$. Ist $k - n \geq 3$, so enthält D die Konfiguration M_9 . Sei nun $k - n = 2$. Sei zunächst einer der beiden aktiven Kreise von $G(D, \eta)$ passiv in $(G(D, \varepsilon))^*$. Dieser Kreis sei mit y bezeichnet. Nach Lemma 81 genügt es, den Fall zu betrachten, dass α durch y teilbar ist. Dann ist aber auch z durch y teilbar. Dies ist ein Widerspruch zu $d_{G(B, \eta), A_2, \ell_\eta}(z) \neq 0$. Seien nun beide aktiven Kreise von $G(D, \eta)$ aktiv in $(G(D, \varepsilon))^*$. D enthalte, auch nach Rotation, keine der lokalen Konfigurationen aus Abbildung 31. Dann gibt es für D bis auf Rotation und Tausch folgende Möglichkeiten. D ist die Konfiguration aus Abbildung 45 (wobei wir die Orientierung der Bögen vergessen) oder D ist diese Konfiguration, wobei der 2. Bogen und x_2 entfernt seien, oder D ist diese Konfiguration, wobei der 2. Bogen, der 3. Bogen, x_2 und x_3 entfernt seien. Sei C wie in Abbildung 45. Sei $a \in \Sigma(k, i)$

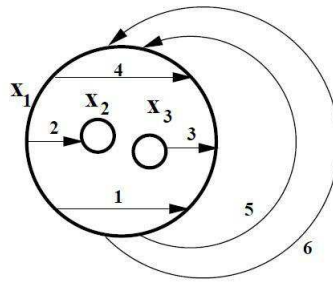


Abbildung 45: aus [4]

mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $a^0 = (0, \dots, 0)$ und so dass $G(C, a)$ von einem Typ aus T ist. Dann ist $i = 1$ oder a entspricht den Bögen 1,2 oder a entspricht den Bögen 3,4. Sei $b \in \Sigma(k, k-i)$ mit $b^0 = a^1$. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T . Es folgt der Fall $Q \in \{B_n\} \times T_3$.

Sei $Q \in \{A_n\} \times T_3$. Dann ist z durch keinen der aktiven Kreise von $(G(D, \varepsilon))^*$

teilbar. Also ist genau einer dieser Kreise auch aktiver Kreis von $G(D, \eta)$. Für $n \geq 3$ enthält D die Konfiguration M_9 . Sei nun $n = 2$. D enthalte, auch nach Rotation, keine der lokalen Konfigurationen aus Abbildung 31. Dann ist D bis auf Rotation und Tausch die Konfiguration aus Abbildung 46 (wobei wir die Orientierung der Bögen vergessen). Sei C wie in Abbildung 46. Sei $a \in \Sigma(4, i)$

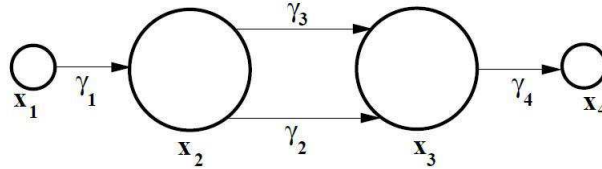


Abbildung 46: aus [4]

mit $i \in \{1, 2, 3\}$ und $a^0 = (0, 0, 0, 0)$ und so dass $G(C, a)$ von einem Typ aus T ist. Dann ist $i = 1$ oder a entspricht den Bögen γ_2, γ_3 . Sei $b \in \Sigma(4, 4 - i)$ mit $b^0 = a^1$. Dann ist $G(C, b)$ von keinem Typ aus T . Es folgt der Fall $Q \in T_3 \times \{B_{k-n}\}$. Sei $Q \in T_3 \times \{C_{p,q} \mid p \leq q \in \mathbb{N}\}$. Dann wird der aktive Kreis von $G(D, \eta)$ von genau einem Bogen aus $(G(D, \varepsilon))^*$ getroffen. Also gilt: Ist $n \geq 3$ so enthält D nach Rotation eine der Konfigurationen M_1, M_2, M_3 . Ist $n = 2$ so enthält D nach Rotation eine der Konfigurationen M_6, M_7 . Es folgt der Fall $Q \in \{D_{p,q} \mid p \leq q \in \mathbb{N}\} \times T_3$. Sei $Q \in T_3 \times \{D_{p,q}\}$ für $p \leq q \in \mathbb{N}$. Dann ist α durch alle Kreise von D teilbar, außer durch den Kreis x_1 , der von mindestens zwei Bögen aus $G(D, \varepsilon)$ getroffen wird. Ein aktiver Kreis von $G(D, \eta)$ ist der Kreis, der von mindestens zwei Bögen aus $(G(D, \varepsilon))^*$ getroffen wird. Alle anderen aktiven Kreise von $G(D, \eta)$ sind passiv in $(G(D, \varepsilon))^*$. Enthält D nicht die Konfiguration M_8 , so bleiben mit dem 2. Teil von Lemma 81 für (p, q) noch die Möglichkeiten $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2)$ zu betrachten. Genauer gilt: Man behalte von D nur die Bögen, die η entsprechen, sowie die Bögen, die einen Randpunkt auf x_1 und den anderen Randpunkt auf einem anderen Kreis, der nicht nur von diesem Bogen getroffen wird, hat. Den aktiven Teil dieser Konfiguration nennen wir den Kern von D . Dann müssen wir für den Kern von D nur die Konfigurationen aus Abbildung 47 und 48 betrachten. In den ersten 2 Fällen aus Abbildung 47 und im Fall

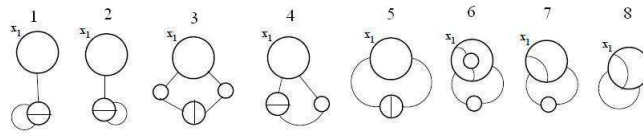


Abbildung 47: Kern von D (Abbildung aus [4])

aus Abbildung 48 enthält D nach Rotation eine der Konfigurationen M_1 - M_5 . Betrachte nun die Fälle 3-8. D enthalte, auch nach Rotation, keine der lokalen Konfigurationen aus Abbildung 31. Dann ist D bis auf Rotation und Tausch wie in Abbildung 49 und 50 (wobei wir die Orientierung der Bögen vergessen), Grad 1 Kreise und die zugehörigen Bögen können entfernt werden, es müssen aber stets mindestens 4 Bögen übrig bleiben. Nach dem Beweis von Lemma

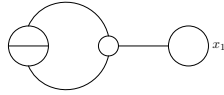


Abbildung 48: Kern von D

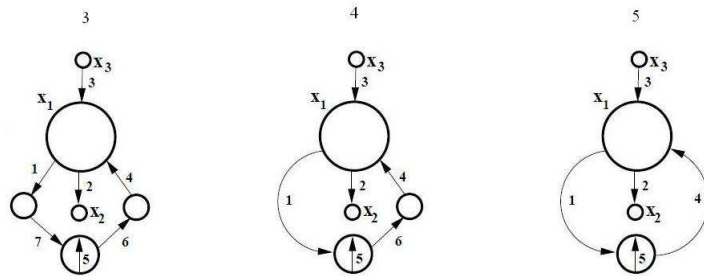


Abbildung 49: aus [4]

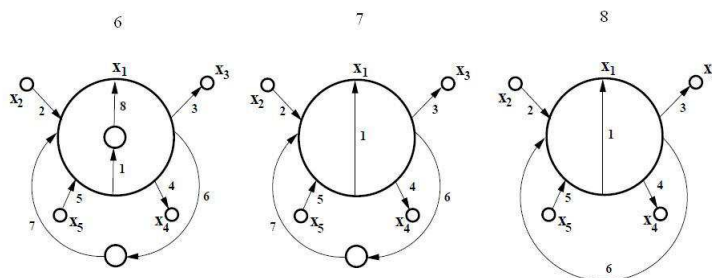


Abbildung 50: aus [4]

84 genügt es den Fall zu betrachten, dass α durch alle Kreise von D teilbar ist, außer durch x_1 . Sei C wie in den Abbildung 49 und 50. Sei s Kantenzuordnung vom Typ Y bezüglich C . Sei $a \in \Sigma(k, i)$ mit $i \in \{1, \dots, k-1\}$ und $b \in \Sigma(k, k-i)$ mit $b^0 = a^1$. In den Fällen 3, 4, 5 gilt: Aus $d_{G(C,a),s|_a}(\alpha) \neq 0$ folgt $i = 1$ oder a entspricht γ_1, γ_2 oder a entspricht γ_3, γ_4 . Dann ist aber $G(C, b)$ von keinem Typ aus T. Für 6 gilt: Aus $d_{G(C,a),s|_a}(\alpha) \neq 0$ folgt $i = 1$ oder a entspricht einer Teilmenge von $\{\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6\}$ oder einer Teilmenge von $\{\gamma_2, \gamma_5, \gamma_7, \gamma_8\}$. Dann ist aber $G(C, b)$ von keinem Typ aus T. Für 7 gilt: Aus $d_{G(C,a),s|_a}(\alpha) \neq 0$ folgt $i = 1$ oder a entspricht einer Teilmenge von $\{\gamma_3, \gamma_4, \gamma_6\}$ oder einer Teilmenge von $\{\gamma_2, \gamma_5, \gamma_7\}$. Dann ist aber $G(C, b)$ von keinem Typ aus T. Für 8 gilt: Aus $d_{G(C,a),s|_a}(\alpha) \neq 0$ folgt $i = 1$ oder a entspricht γ_2, γ_5 oder γ_3, γ_4 oder γ_5, γ_6 oder γ_3, γ_6 . Aus $d_{G(C,b),s|_b} \circ d_{G(C,a),s|_a}(\alpha) \neq 0$ folgt, dass es für a und b folgende Möglichkeiten gibt:

- a entspricht γ_1 und b entspricht $\gamma_6, \gamma_3, \gamma_4$.
- a entspricht γ_1 und b entspricht $\gamma_6, \gamma_2, \gamma_5$.
- a entspricht γ_5, γ_6 und b entspricht γ_1, γ_2 .
- a entspricht γ_3, γ_6 und b entspricht γ_1, γ_4 .

Es bleiben also für D noch die beiden Konfigurationen aus Abbildung 51 zu betrachten. Die beiden sind aber gleich und gehen durch Rotation in die Konfi-

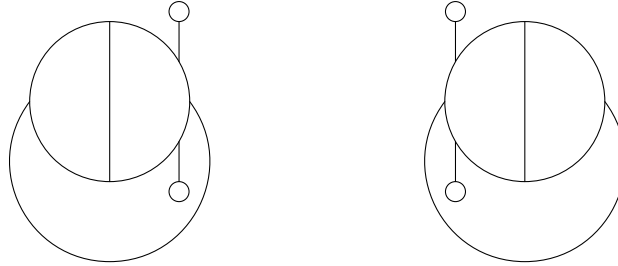


Abbildung 51:

guration aus Abbildung 52 über, welche bereits behandelt wurde. Es folgt der

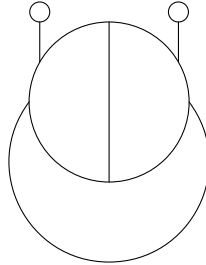


Abbildung 52:

Fall $Q \in \{C_{p,q} \mid p \leq q \in \mathbb{N}\} \times T_3$.

Sei $Q \in T_3 \times T_3$. Sei r die Anzahl der Kreise von $G(D, \varepsilon^1)$ die sowohl in $(G(D, \varepsilon))^*$, als auch in $G(D, \eta)$ aktiv ist. Da D zusammenhängend ist, ist $r \geq 1$. Es gibt genau einen aktiven Kreis von $(G(D, \varepsilon))^*$ durch den z teilbar ist. Es gibt genau einen aktiven Kreis von $G(D, \eta)$ durch den z nicht teilbar ist. Es folgt $r \leq 2$. Ist $r = 1$, so enthält D nach Rotation eine der Konfigurationen M_1 - M_7 . Sei nun $r = 2$. Sei x_1 der Kreis von D , der von mindestens zwei Bögen aus $G(D, \varepsilon)$ getroffen wird. Dann müssen wir nur den Fall betrachten, dass α durch alle Kreise von D außer durch x_1 teilbar ist. D enthalte, auch nach Rotation, keine der lokalen Konfigurationen aus Abbildung 31. Dann ist D bis auf Rotation und Tausch wie in Abbildung 53, wobei Grad 1 Kreise und die zugehörigen Bögen entfernt werden können, es müssen aber stets mindestens 4 Bögen übrig bleiben. Nach

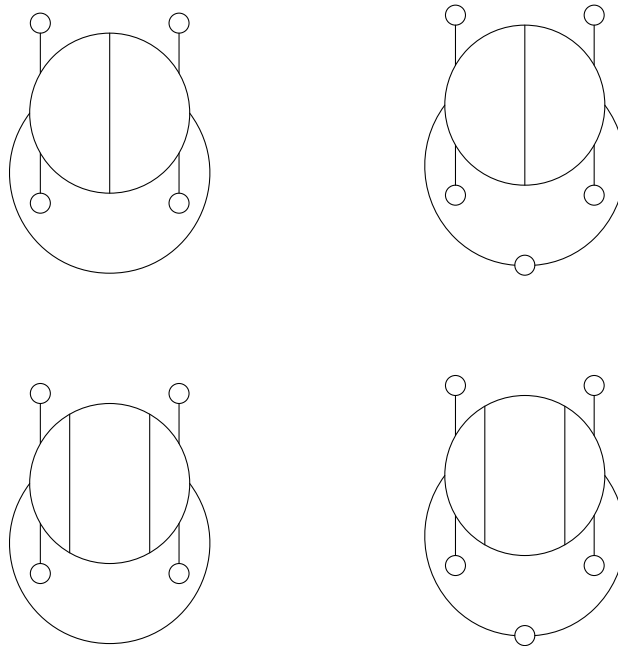


Abbildung 53:

dem Beweis von Lemma 84 genügt es den Fall zu betrachten, dass α durch alle Kreise von D teilbar ist, außer durch x_1 . Die beiden oberen Fälle wurden bereits behandelt. Für den unteren linken Fall ist $m(D^*)$ bis auf Rotation und Tausch gleich dem D aus dem oberen rechten Fall. Für den unteren rechten Fall sei C wie in Abbildung 54. Dies lässt sich analog zum Fall 7 aus Abbildung 50 behandeln. \square

Damit ist Satz 76 bewiesen. \square

9 Invarianz der Spektralsequenz

Beweis von Satz 66. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass sich C und D nur in der Orientierung des i -ten Bogens unterscheiden. Es seien $f, g : \Gamma(C) \rightarrow \Gamma(C)$ definiert durch $f := \text{id}_{\Gamma(C)} + H_i(C, s)$ und $g := \text{id}_{\Gamma(C)} - H_i(C, s)$. Dann gilt $f \circ g =$

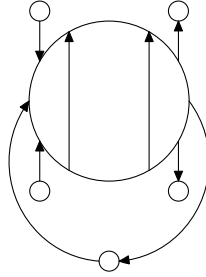


Abbildung 54:

$\text{id}_{\Gamma(C)} = g \circ f$. Nach Satz 71 gibt es eine Kantenzuordnung u vom Typ Y bezüglich D , so dass

$$d(C, s) - d(D, u) = d(C, s) \circ H_i(C, s) - H_i(C, s) \circ d(C, s).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & d(D, u) \circ f(x) \\ &= (d(C, s) - d(C, s) \circ H_i(C, s) + H_i(C, s) \circ d(C, s))(x + H_i(C, s)(x)) \\ &= d(C, s)(x) + H_i(C, s) \circ d(C, s)(x) - \underbrace{d(C, s) \circ H_i(C, s) \circ H_i(C, s)(x)}_{=0} + \underbrace{H_i(C, s) \circ d(C, s) \circ H_i(C, s)(x)}_{=0} \\ &= f \circ d(C, s)(x) \end{aligned}$$

Also sind $\Omega(C, s)$ und $\Omega(D, u)$ isomorph. Der Beweis von Lemma 21 liefert einen Isomorphismus zwischen $\Omega(D, u)$ und $\Omega(D, t)$. \square

Beweis von Satz 67. Die Aussage folgt aus den Beweisen von Proposition 23, Proposition 24 und Proposition 25. Für Reidemeister-Bewegung 3 beachte: Sei C eine orientierte mindestens zweidimensionale Konfiguration, die eine lokale Konfiguration wie in Abbildung 55 enthält. Dann gilt für jede Kantenzuord-

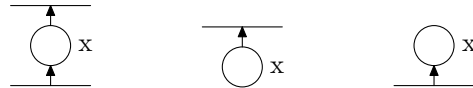


Abbildung 55:

nung s vom Typ Y bezüglich C und für jedes Monom $\alpha \in \Lambda V(C)$: Ist α nicht durch x teilbar, so ist $d_{C,s}(\alpha) = 0$. \square

Literatur

- [1] Mikhail Khovanov. A categorification of the jones polynomial. *DUKE MATH.J.*, 3:359, 2000.
- [2] Dror Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial. *Algebr. Geom. Topol.*, 2:337–370, 2002.
- [3] Peter Ozsvath, Jacob Rasmussen, and Zoltan Szabo. Odd khovanov homology. arXiv:0710.4300v1, 2007.
- [4] Zoltan Szabo. A geometric spectral sequence in khovanov homology. arXiv:1010.4252v1, 2010.
- [5] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 38. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.